ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Лекція 11

ТЕРМИ І ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПРОГРАМИ

2020

Повний текст лекції буде розміщений на сайті baklaniv.at.ua

ТЕРМИ.
Змінні і константи.

Мы будем предполагать, что для каждого типа t заданы

- счётное множество Var_t **переменных типа** t, и
- множество Con_t **констант типа** t, причём
  - каждой константе $c \in Con_t$ соответствует некоторый элемент пополненного домена $\tilde{D}_t$, называемый **значением** этой константы, и
  - любой элемент $d \in \tilde{D}_t$ является константой типа t, которой соответствует сам элемент d.

Ниже символ ε обозначает константу типа `string`, которой соответствует пустая строка.

Функціональні символи

Мы будем предполагать, что задано некоторое множество Fun, элементы которого называются **функциональными символами (ФС)**, и каждому ФС g сопоставлены

- ФТ $type(g)$, и
- функция из $D_{type(g)}$, обозначаемая тем же символом g.

Разные ФС могут иметь одинаковое обозначение. В частности, запись

$$if\_then\_else$$

обозначает ФС

- ФТ которого имеет вид

  $$(\mathtt{bool}, t, t) \to t$$

  где t – произвольный тип, и

  - d_2, если $d_1 = \top$
  - d_3, если $d_1 = \bot$
  - ω, если $d_1 = \omega$

  Нетрудно доказать, что данная функция монотонна.

Ниже мы перечисляем некоторые ФС, входящие в Fun. Каждому такому ФС g соответствует функция из $D_{type(g)}$, являющаяся естественным продолжением функции вида

$$D_1 \times \ldots \times D_n \to D \tag{15}$$

где $D_1, \ldots, D_n, D$ – соответствующие домены. Мы будем указывать для каждого из перечисляемых ФС соответствующую ему функцию вида

1. ФС $+$, $-$, $\cdot$, им соответствуют арифметические функции на целых или натуральных числах.

2. ФС $\neg$, тип которого имеет вид

$$\mathtt{bool} \to \mathtt{bool}$$

и ФС $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, тип которых имеет вид

$$(\mathtt{bool}, \mathtt{bool}) \to \mathtt{bool}$$

Этим ФС соответствуют булевы функции: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция.

3. ФС $=$, тип которого имеет вид

$$(t, t) \to \texttt{bool}$$

где t – произвольный тип.

Этому ФС соответствует функция отображающая каждую пару $(d_1, d_2) \in D_t \times D_t$ в элемент

- $\top$, если $d_1 = d_2$, и
- $\bot$, если $d_1 \neq d_2$.

4. ФС $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, тип которых имеет вид

$$(t, t) \to \texttt{bool}$$

где t – произвольный тип, такой, что на домене D_t определено отношение частичного порядка.

Каждому из этих ФС соответствует функция вида

$$D_t \times D_t \to \mathbf{B}$$

отображающая каждую пару $(d_1, d_2) \in D_t \times D_t$ в элемент

- $\top$, если $d_1 < d_2$, $d_1 \leq d_2$, $d_1 > d_2$, $d_1 \geq d_2$ соответственно
- $\perp$, если соответствующее соотношение неверно.

5. ФС $conc$, $head$ и $tail$, соответствующие функциям на строках. Описание этих функций приведено выше.

6. ФС ω, которому соответствует функция из D_{ft}, где ft – произвольный ФТ, принимающая на каждом своём аргументе значение ω.

Функціональні змінні

Мы будем предполагать, что задано множество $FVar$, элементы которого называются **функциональными переменными**, и каждой функциональной переменной φ сопоставлен некоторый ФТ $type(\varphi)$, причём для каждого ФТ ft множество всех функциональных переменных φ, таких, что $type(\varphi) = ft$, является счётным.

Терми

Ниже мы определяем понятие **терма**. С каждым термом e связан некоторый тип $type(e)$.

Понятие терма определяется индуктивно следующим образом.

1. Для каждого типа t все переменные и константы типа t являются термами типа t.

2. Если g – ФС или функциональная переменная, и

$$type(g) \quad = \quad (t_1, \ldots, t_n) \to t$$

то для каждого списка термов $e_1, \ldots, e_n$, типы которых равны t_1, ... , t_n соответственно, запись

$$g(e_1, \ldots, e_n)$$

является термом типа t.

Ниже мы будем использовать следующие соглашения и обозначения.

1. Термы вида
$$if\_then\_else\ (e_1, e_2, e_3)$$
будут сокращённо записываться в виде
$$e_1\ ?\ e_2 : e_3$$

2. Термы, содержащие ФС
$$+,\ -,\ \cdot,\ =,\ <,\ \leq,\ >,\ \geq,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$
будут записываться так, как это принято в математических текстах, т.е. каждый терм вида $g(e_1, e_2)$, где g – один из вышеперечисленных ФС, мы будем записывать в виде $e_1\, g\, e_2$.

3. Термы вида

$$conc(e_1, e_2), \quad head(e), \quad tail(e)$$

мы будем записывать в виде $e_1 \cdot e_2, \hat{e}$ и e' соответственно.

4. В целях большей наглядности, термы вида $e_1 \wedge e_2$ и $e_1 \vee e_2$ будут иногда записываться в виде

$$\left\{ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \right]$$

соответственно.

5. Если ФС или функциональная переменнная g имеет тип $(t_1) \to t$, то в терме вида $g(h(\ldots))$, где h – ФС или функциональная переменнная, скобки слева и справа от $h(\ldots)$ могут опускаться.

6. Для каждого терма e

- $Var(e)$ обозначает совокупность всех переменных, входящих в e, и

- $FVar(e)$ обозначает совокупность всех функциональных переменных, входящих в e.

7. Если

- e – некоторый терм,
- $x_1, \ldots, x_n$ – список различных переменных, и
- $e_1, \ldots, e_n$ – список термов, таких, что

$$\forall\, i = 1, \ldots, n \quad type(e_i) = type(x_i)$$

то запись

$$e(e_1/x_1, \ldots, e_n/x_n) \tag{16}$$

обозначает терм, получаемый из e заменой для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ каждого вхождения переменной x_i в e на терм e_i.

Если все термы в списке $e_1, \ldots, e_n$ являются константами, и данный список обозначается записью $\bar{d}$, то терм (16) можно также обозначать записью $e(\bar{d})$.

Функції, що відповідають термам
Значення термів

Если терм e содержит только константы и ФС, то этому терму можно сопоставить **значение**, которое

- является элементом множества $\tilde{D}_{type(e)}$, и
- определяется индуктивно следующим образом:
  - если e является константой типа t, то его значение равно тому элементу множества $\tilde{D}_t$, который сопоставлен этой константе,
  - если e имеет вид

$$g(e_1, \ldots, e_n) \quad (g \in Fun)$$

то его значение равно значению функции g на списке значений термов e_1, ..., e_n.

Мы будем обозначать значение терма той же записью, которой обозначается сам этот терм.

Функції, що відповідають термам

Пусть заданы

- терм e, не содержащий функциональных переменных, и
- список $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ различных переменных, причём каждая переменная из $Var(e)$ входит в $\bar{x}$
(список $\bar{x}$ может быть пустым, если e не содержит переменных).

Обозначим символом $D_{\bar{x}}$ декартово произведение

$$\tilde{D}_{type(x_1)} \times \ldots \times \tilde{D}_{type(x_n)} \tag{17}$$

и символом ft – ФТ

$$(type(x_1), \ldots, type(x_n)) \to type(e)$$

Запись $e(\bar{x})$ обозначает функцию из D_{ft}, которая

- называется **функцией, соответствующей терму** e, и
- определяется следующим образом: для каждого списка

$$\bar{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in D_{\bar{x}}$$

значение функции $e(\bar{x})$ на списке $\bar{d}$ обозначается записью $e(\bar{d})$ и равно значению терма

$$e(d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n).$$

Если список $\bar{x}$ пуст, то область определения функции $e(\bar{x})$ состоит из одного элемента, и функция $e(\bar{x})$ сопоставляет этому элементу значение терма e.

Нетрудно доказать, что если функции, соответствующие тем ФС, которые входят в e, монотонны, то функция $e(\bar{x})$ тоже монотонна.

Означування функціональних змінних

Пусть задано конечное множество Φ функциональных переменных:

$$\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}.$$

Означиванием функциональных переменных из множества Φ называется список пар вида

$$((\varphi_1, f_1), \ldots, (\varphi_n, f_n)) \tag{18}$$

где $\forall\, i = 1, \ldots, n \quad f_i \in D_{type(\varphi_i)}$.

ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПРОГРАМИ

Поняття функціональної програми

Функциональная программа (ФП) – это совокупность Σ формальных равенств вида

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1(\bar{x}_1) = e_1 \\ \dots \\ \varphi_n(\bar{x}_n) = e_n \end{array}\right. \tag{19}$$

где

1. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – различные функциональные переменные, и
2. для каждого $i = 1, \dots, n$
   (a) $\varphi_i(\bar{x}_i)$ и e_i – термы одинакового типа,
   (b) $\bar{x}_i$ – список всех переменных из $Var(e_i)$,
   (c) $FVar(e_i) \subseteq \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, и
   (d) функции, соответствующие тем ФС, которые входят в e_i, являются монотонными.

ФП (19) можно рассматривать как систему функциональных уравнений, решением которой является произвольный список $\bar{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ функций, таких, что

$$\forall\, i = 1, \ldots, n \quad f_i = e_i[f_1/\varphi_1, \ldots, f_n/\varphi_n](\bar{x}_i) \tag{20}$$

Если верно (20), то мы будем говорить, что ФП Σ является **описанием** списка функций $\bar{f}$.

Ниже запись

$$\Sigma : \begin{cases} \varphi_1(\bar{x}_1) = e_1 \\ \dots \\ \varphi_n(\bar{x}_n) = e_n \end{cases}$$

означает, что Σ – это ФП, состоящая из равенств, изображённых справа от фигурной скобки. Если Σ состоит из одного равенства, то фигурная скобка может отсутствовать.

Функціонал, що відповідає функціональній програмі

Пусть Σ – ФП вида ($\boxed{19}$).

Обозначим символом P_Σ декартово произведение

$$D_{type(\varphi_1)} \times \ldots \times D_{type(\varphi_n)}$$

Мы будем рассматривать P_Σ как ЧУМ, отношение порядка на котором определяется следующим образом: для любых списков $\bar{f}$ и $\bar{f}'$ из множества P_Σ, где

$$\bar{f} = (f_1, \ldots, f_n), \quad \bar{f}' = (f_1', \ldots, f_n')$$

мы будем полагать $\bar{f} \leq \bar{f}'$, если

$$f_1 \leq f_1', \ \ldots \ , \ f_n \leq f_n'.$$

Нетрудно видеть, что P_Σ – полное ЧУМ, т.к.

- список
$$(\omega, \ldots, \omega)$$
является наименьшим элементом в P_Σ, и

- для каждой цепи $\bar{f}_0 \leq \bar{f}_1 \leq \bar{f}_2 \leq \ldots$ элементов P_Σ существует её точная верхняя грань, которая имеет следующий вид:
$$\sup \bar{f}_i \;=\; (\sup f_{i1}, \ldots, \sup f_{in})$$
где $\forall\, i \geq 0 \quad \bar{f}_i = (f_{i1}, \ldots, f_{in})$.

Функционал, соответствующий ФП Σ – это отображение F_Σ вида

$$F_\Sigma : P_\Sigma \to P_\Sigma$$

которое сопоставляет каждому списку функций

$$\bar{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in P_\Sigma$$

список функций $\bar{f}' = (f'_1, \ldots, f'_n) \in P_\Sigma$, определяемых следующим образом:

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \quad f'_i \stackrel{\text{def}}{=} e_i[f_1/\varphi_1, \ldots, f_n/\varphi_n](\bar{x}_i)$$

Безперервні функціонали на повних частково впорядкованих множинах

Пусть P – полное ЧУМ.

Функционал на P – это отображение F вида

$$F : P \to P$$

Функционал $F : P \to P$ называется

- **монотонным**, если для каждой пары p_1, p_2 элементов P верна импликация

$$p_1 \leq p_2 \quad \Rightarrow \quad F(p_1) \leq F(p_2)$$

- **непрерывным**, если
  - он является монотонным, и
  - для каждой цепи $p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots$ элементов P верно равенство
    $$F(\sup p_i) = \sup F(p_i)$$
    (отметим, что правая часть данного равенства имеет смысл, поскольку из свойства монотонности F следует, что последовательность $\{F(p_i) \mid i \geq 0\}$ является цепью)

Непрерывность функционала не является следствием его монотонности. Например, рассмотрим функционал F на D_{ft}, где $ft = (\mathtt{nat}) \to \mathtt{nat}$:

$$\forall f \in D_{ft} \quad F(f) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f & \text{если} \;\; \forall\, k \in \mathbf{N} \quad f(k) = k \\ \omega & \text{иначе} \end{cases}$$

Данный функционал является монотонным. Однако он не является непрерывным. Действительно, цепь

$$\{f_i \mid i \geq 0\}$$

функций из D_{ft}, где для каждого $i \geq 0$ функция f_i соответствует терму

$$(x < i)?\, x : \omega$$

обладает следующими свойствами:

- $\forall i \geq 0 \quad F(f_i) = \omega$, поэтому
$$\sup F(f_i) = \omega$$
- $\sup f_i = id = F(\sup f_i)$
(где id – тождественная функция из D_{ft})

Нерухомі точки функціоналів на повних частково впорядкованих множинах

Пусть F – функционал на полном ЧУМ P.

Элемент $p \in P$ называется

- **неподвижной точкой (НТ)** функционала F, если верно равенство

$$F(p) = p$$

- **наименьшей НТ (ННТ)** функционала F, если
  - p – НТ функционала F, и
  - для каждой НТ p' функционала F верно неравенство

$$p \leq p'$$

Отметим, что если ННТ функционала F существует, то она единственна, т.к. если p' и p'' две ННТ функционала F, то, согласно определению ННТ, должны быть верны неравенства

$$p' \leq p'' \quad \text{и} \quad p'' \leq p'$$

откуда, в силу свойства антисимметричности отношения частичного порядка, получаем совпадение p' и p''.

Для каждой ФП Σ и каждого списка функций $\bar{f} \in P_\Sigma$ следующие утверждения эквивалентны:

- Σ является описанием списка функций $\bar{f}$
- $\bar{f}$ является НТ функционала F_Σ.

На наступній лекції ми розглянемо алгоритмічну повноту функціональної програми та обчислення значень їх найменьших нерухомих точок.