КОМП`ЮТЕРНА ЛІНГВІСТИКА

Лекція 1. КОМБІНАТОРНІ МЕТОДИ У ЛІНГВІСТИЦІ

Запровадження ЕОМ у сферу інтелектуальної діяльності людини покликало до життя нову комунікативну систему «людина – машина – людина», в межах якої функціонування природної мови відрізняється від функціонування її в безпосередньому людському спілкуванні. Дослідження й опис природної мови в нових комунікативних системах вимагає й нових методів та підходів. Для розв'язування поставлених проблем прикладна лінгвістика повинна, використовуючи власне лінгвістичні дані, звертатися до багатьох інших дисциплін – кібернетики, математики, психології, фізики, медицини. Цим вона сприяє розширенню контактів мовознавчої науки з іншими науками і збагаченню лінгвістики новими очними методами дослідження мови. До них належать: методи математичної статистики, математичного програмування, булевої алгебри, імовірнісно-інформаційні методи, комбінаторні методи; структурні методи.

У зв'язку з поширенням інтелектуальних інформаційних систем обробки інформації та систем перекладу з однієї природної мови на іншу, зростає необхідність підготовки інженерних кадрів, які володіють точними методами у мовознавстві та можуть кваліфіковано та свідомо використовувати весь спектр сучасного програмного забезпечення у цій галузі. Застосування математичних методів у лінгвістиці обумовлено двома причинами.

По-перше, розвиток теорії і практики мовознавства вимагає введення все більш точних і об'єктивних методів для аналізу мови і тексту. Разом з тим, використання математичних прийомів при систематизації, вимірюванні та інтерпретації лінгвістичного матеріалу у поєднанні з якісним аналізом результатів дозволяє мовознавцям глибше проникнути у таємниці побудови мови і утворення тексту.

По-друге, контакти мовознавства з іншими науками (акустикою, фізіологією вищої нервової діяльності, кібернетикою та обчислювальною технікою тощо) постійно розширюються і можуть існувати тільки при використанні математичної мови, яка має високий ступінь загальності та універсальності для різних гілок знань. Особливо наполегливо математизується мовознавство у зв'язку з використанням природної мови в інформаційних і управлінських системах людина-машина-людина. В існуючих системах машинного перекладу, автоматичного анотування, людино-машинного діалогу будь-яке повідомлення на природній мові перекодовується в математичну мову комп'ютера.

Застосування математичних методів у мовознавстві має на меті замінити звичайно дифузну, інтуїтивно сформульовану і таку, що не має повного розв'язку, лінгвістичну задачу однією або декількома простішими, логічно сформульованими математичними задачами, які мають *алгоритмічний* розв'язок. Таке розділення складної лінгвістичної проблеми на простіші задачі, які алгоритмізуються, ми будемо називати *математичною експлікацією* лінгвістичного об'єкту або явища.

Математична експлікація цікава не тільки з чисто пізнавальної і теоретичної точки зору. Вона абсолютно необхідна при розв'язуванні прикладних завдань, пов'язаних з аналізом і синтезом усної мови або інформаційною обробкою текстів з використанням комп'ютера. Математична експлікація лінгвістичних об'єктів застосовується не тільки при розв'язуванні з допомогою комп'ютера нескладних, хоча і важливих задач такого типу, як упорядкування частотних і алфавітних словників або послівного і пооборотного машинного перекладу, але також при складанні і реалізації таких евристичних алгоритмів штучного інтелекту, як семантичний переклад або тезаурусне реферування тексту.

Відзначимо, що абстрактні моделі використовуються при вивченні мови дуже давно – з тих часів, як існує граматика. Такі елементарні поняття граматики, як підмет, присудок, відмінок, рід тощо, є достатньо абстрактними конструкціями, які відносяться до фактів мови саме як моделі. Усвідомити їх абстрактний характер важко лише через їх звичність. За своєю суттю ці поняття досить близькі до математичних. Тут доречно зауважити, що на базі понять підмета і присудка було вироблено центральне поняття сучасної математичної логіки – *поняття предиката*.

Створення абстрактних моделей завжди було головним засобом *теоретичного* вивчення мови. Але значення цього факту було усвідомлено лише на початку XX століття, коли у працях основоположників так званої структурної лінгвістики виникла концепція мови як абстрактної знакової системи, у якій визначальна роль належить не матеріальній природі знаків, а співвідношенням між ними. Тому засобом пізнання законів мови є побудова абстрактних моделей її структури та їх вивчення.

Із вказаної концепції природно було зробити висновок, що мову потрібно вивчати засобами, що є близькими до тих, котрими користується математика при аналізі своїх формальних систем. Ці системи, як і мова, характеризуються тим, що в них важливими є тільки відношення між об’єктами, а не матеріальна природа останніх. По суті, математичні системи – це спеціальні різновиди мови, які вирізняються особливо чіткою структурою. Іншими словами, математика може виявитись придатною *метамовою* для вивчення природних мов і тим самим стати універсальною мовою лінгвістики. Саме це і відбулося з виникненням математичної лінгвістики.

У середині 50-х років XX століття визначились основні принципи трактування лінгвістичних понять – і математична лінгвістика почала бурхливо розвиватись. Прискоренню її розвитку істотно сприяла та обставина, що власне тоді, у зв’язку з появою обчислювальних машин і швидким зростанням потоку наукової інформації, була поставлена задача автоматизованого перекладу, інформаційного пошуку, побудова штучного здорового глузду та розпізнавання мови. Ці задачі привернули до лінгвістики увагу спеціалістів у галузі точних наук і поставила до неї вимоги, які неможливо було задовольнити без різкого підвищення рівня строгості лінгвістичних понять.

З допомогою математичної лінгвістики можна вирішувати такі практичні задачі прикладної лінгвістики:

1. Створення і вдосконалення писемності;
2. Дешифрування невідомих писемностей;
3. Автоматичне розпізнавання та автоматичний синтез усної мови;
4. Удосконалення засобів зв’язку шляхом оптимізації мовної інформації;
5. Автоматизований інформаційний пошук;
6. Машинний переклад;
7. Автоматичне оброблення текстів, записаних природними мовами;
8. Автоматичне реферування та автоматичне індексування тексту.

1.1 Елементи комбінаторного аналізу

На практиці люди часто зустрічаються з задачами, в яких необхідно підрахувати число всіх можливих способів розміщення деяких предметів скінченої множини або число всіх можливих способів виконання певної дії зі скінченої множини таких дій. Наприклад, скількома способами можуть розподілитися медалі на чемпіонаті світу з футболу серед 16-ти команд-учасниць фінальної групи? Задачі такого типу називаються ***комбінаторними***, а методи їх розв'язку – ***методами комбінаторного аналізу***. Оскільки комбінаторика має справу зі скінченими множинами, то її часто називають ***теорією скінчених множин***.

Введемо деякі важливі позначення. Множини будемо позначати великими латинськими літерами. Множини складаються із елементів, які будемо позначати малими латинськими літерами. Так, запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A. Множини будемо зображати переліком елементів та розмішувати їх у фігурні дужки. Наприклад, $A = \{a, b, x, y\}$. Кількість елементів в множині називається потужністю і записується як $|A|$; тут $|A|$=4.

Нехай дано дві непорожні множини A і B. Розглянемо всі пари елементів цих множин за умови, що перший елемент береться із множини A, а другий – із множини B. Отримана таким чином множина називається прямим добутком $A \times B$ множин A і B. Нагадаємо деякі властивості множин та операції над ними.

Скінчена множина – множина зі скінченою кількістю елементів.

$\varnothing$ – порожня множина.

U – універсальна множина.

$\overline{A} = U / A = \{x \mid x \notin A\}$ – доповнення множини.

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ – прямий добуток множин.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ – об'єднання множин.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ – перетин множин.

$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ – різниця множин.

1.1.1 Правило додавання

Нехай A і B – скінчені множини такі, що $A \cap B = \varnothing$, $|A| = m$ і $|B| = n$. Тоді $|A \cup B| = m + n$.

Інтерпретація. Якщо елемент $a \in A$ можна вибрати m способами, а елемент $b \in B$ – n способами, то вибір елемента $x \in A \cup B$ можна здійснити $m+n$ способами. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_k$ – множини, що попарно не перетинаються, $X_i \cap X_j = \varnothing$, де $i \neq j$. Тоді, відповідно, виконується рівність $\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|$.

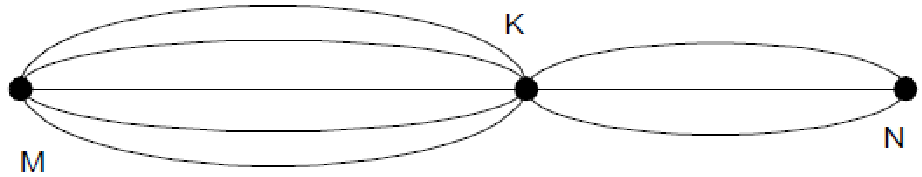
1.1.2 Правило добутку

Нехай A і B – скінчені множини, $|A| = m$ і $|B| = n$, тоді $|A \times B| = m \cdot n$.

Інтерпретація. Якщо елемент $a \in A$ можна вибрати m способами і якщо після кожного такого вибору елемент $b \in B$ можна вибрати n способами, то вибір пари $(a,b) \in A \times B$ у вказаному порядку можна здійснити $|A \times B| = m \cdot n$ способами. В цьому випадку говорять, що вибір елементів множини A не залежить від способу вибору елементів множини B. Нехай тепер $X_1, X_2, \ldots, X_k$ – будь-які множини, $|X_i| = n_i$, $i = \overline{1,k}$. Тоді

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k| = \left|\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_i \in X_i, i = \overline{1,k}\right\}\right| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Задача



Знайти кількість маршрутів із пункту M в пункт N через пункт K. Із M в K ведуть 5 доріг, із K в N – 3 дороги.

Розв'язок. Введемо дві множини: $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ – дороги із M в K, $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ – дороги із K в N. Тепер дорогу із пункту M в пункт N через пункт K можна представити парою (s_i, t_j), де $i = 1,2,3,4,5$; $j = 1,2,3$. Відповідно, $S \times T$ – це множина всіх доріг із M в N, кількість яких рівна $|S \times T| = 5 \cdot 3 = 15$.

1.1.3 Основне правило комбінаторики

Розглянемо наступну задачу. Нехай з пункту A міста Києва в пункт B можна дістатись трьома видами транспорту: тролейбусом (Т), автобусом (А) і метро (М), а з пункту B в пункт C – лише двома видами транспорту: тролейбусом (Т) і автобусом (А). Скількома способами можна доїхати з пункту A в пункт C міста Києва? Розв'язок цієї задачі зводиться, очевидно, до підрахунку числа елементів в декартовому добутку множин {А, Т, М}$\times${А, Т}. Число таких елементів, як ми знаємо, дорівнює добутку числа елементів першої множини на число елементів другої множини, тобто в нашому випадку $3 \cdot 2 = 6$. Отже, існує шість способів доїхати із пункту A в пункт C. Виявляється, що за цією простою задачею стоїть правило, яке називається ***основним правилом комбінаторики***.

Нехай необхідно виконати послідовно k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами і так далі до k-ї дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дій можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Приклади

1. Скількома способами на першості світу з футболу можуть розподілитися медалі, якщо у фінальній частині грають 24 команди?

Розв'язок. Золоту медаль може одержати будь-яка з 24-х команд, тобто маємо 24 можливості. Срібну медаль може виграти одна з 23-х команд, а бронзову – одна з 22-х команд. За основним правилом комбінаторики, загальне число способів розподілу медалей $24 \cdot 23 \cdot 22 = 12144$.

2. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$, якщо:

a. Цифри можуть повторюватися;

b. Ні одна з цифр не повторюється двічі;

c. Цифри непарні і можуть повторюватися.

Розв'язок

a. Першою цифрою може бути одна із цифр $1, 2, 3, 4, 5$, оскільки 0 не може бути першою цифрою, бо в такому випадку число не буде тризначним (буде двозначним). Якщо перша цифра вибрана, то друга може бути вибрана шістьма способами, як і третя цифра. Отже, загальне число тризначних цифр $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$.

b. Першою цифрою може бути одна із п'яти цифр – $1, 2, 3, 4, 5$; якщо перша цифра вибрана, то другою може бути теж одна з п'яти цифр (тут уже враховується 0), а третя може бути вибрана чотирма способами з чотирьох цифр, що залишилися. Отже, загальна кількість таких тризначних чисел $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$.

c. Першою цифрою може бути одна з трьох цифр: $1, 3, 5$. Другою теж може бути одна з цих трьох цифр. Аналогічно і третя цифра може бути вибрана трьома способами. Таким чином, загальна кількість таких чисел дорівнює $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

1.2 Число різних *k*-елементних підмножин *n*-елементної множини

Розглянемо тепер, скільки існує різних підмножин із k елементів в множині, що має n елементів $(k \le n)$.

Теорема 1. *Число різних k-елементних підмножин n-елементної множини становить*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{1}$$

де функція $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ називається ***факторіалом числа n*** *(читається n-факторіал).*

1.2.1 Розміщення з повтореннями

Задача формулюється наступним чином. Є елементи n різноманітних видів $a_1, a_2, ..., a_n$. Із них складають всі можливі комбінації довжини k, причому елементи в комбінації можуть повторюватись. Наприклад, $a_2 a_1 a_3 a_3 a_4 a_3 a_2 a_1$ – комбінація довжини 8. Такі комбінації називаються розміщеннями з повторенням із n по k (елементи одного виду можуть повторюватись). Знайдемо загальну кількість розміщень, серед яких два розміщення вважаються відмінними, якщо вони відрізняються один від одного чи виглядом в них елементів, чи порядком їх слідування. При утворенні вказаних розміщень довжини k на кожне місце можна поставити елемент будь-якого вигляду. Розглянемо множини $X_1, X_2, ..., X_k$ такі, що $X_1 = X_2 = ... = X_k = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Тоді всі розміщення з повтореннями складають множину $X_1 \times X_2 \times ... \times X_k$. За правилом прямого добутку отримуємо, що загальна кількість розміщень з повтореннями із n по k дорівнює $|X_1 \times X_2 \times ... \times X_k| = n^k$.

Задача. Знайти кількість всіх п'ятизначних чисел.

Розв'язок. Введемо п'ять множин: $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \{0, 1, ..., 9\}, A_1 = \{1, 2, ...9\}$. Тоді всі п'ятизначні числа складають прямий добуток вказаних множин $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$. Згідно правила прямого добутку, кількість елементів в множині $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$ складає $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$.

1.2.2 Розміщення без повторень

Розглянемо n різних елементів $a_1, a_2, ..., a_n$. Скільки комбінацій довжиною k можна скласти з них, якщо повторення не дозволяються?. Такі розміщення називаються розміщеннями без повторень, а їх кількість позначають A_n^k (два розміщення вважаються різними, якщо вони відрізняються виглядом складових або порядком їх розташування). При складанні таких комбінацій на перше місце можна поставити будь-який із n елементів. На друге місце тепер можна поставити лише будь-який із $n-1$ елементів і т. д. Нарешті, на k-те місце – будь-який із $n-k+1$ елементів. За правилом прямого добутку отримаємо, що загальна кількість розміщень без повторень із n по k дорівнює $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = n!/(n-k)!$. Нагадаємо, що $n! = n(n-1)...1$ та $0! = 1$.

Задача. В хокейному турнірі беруть участь 17 команд. Розігруються золота, срібна та бронзова медалі. Скількома способами можуть бути розподілені медалі?

Розв'язок. 17 команд претендують на 3 місця. Тоді трійку призерів можна вибрати способами $A_{17}^{3} = \frac{17!}{14!} = 17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$.

1.2.3 Перестановки

При утворенні розміщень без повторень із n по k ми отримали комбінації, які відмінні одна від одної або складом, або порядком елементів. Але якщо розглядати розміщення, які містять всі n елементів, то вони можуть відрізнятись один від одного лише порядком розташування цих елементів. Такі розміщення називаються перестановками із n елементів, а їх кількість позначається P_n. Відповідно, кількість перестановок дорівнює $P_n = A_n^n = n!$. Перестановки $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$ елементів $1, 2, ..., n$ записують і в матричній формі $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_n \end{pmatrix}$, де верхній рядок – це порядкові номери $1, 2, ..., n$ позицій елементів в перестановці; нижній рядок – той же набір чисел $1, 2, ..., n$, взятих в певному порядку, π_j - номер елемента на j-му місці перестановки. Порядок стовпців в перестановках, записаних в матричній формі, не є суттєвим, оскільки в цьому випадку номер позиції кожного елементу в перестановці вказується явно в верхньому рядку. Наприклад, перестановка $(3, 2, 4, 1)$ із чотирьох елементів може бути записана як $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ і т.д.

Задача. Скількома способами можна розставити на шаховій дошці 8 тур, щоб вони не могли бити одна одну?

Розв'язок. Умова "не могли бити" означає, що на кожній горизонталі та вертикалі може стояти лише одна тура. Тому кожному розміщенню тур на дошці відповідає перестановка $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & 8 \\ \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_8 \end{pmatrix}$. Верхній рядок перестановки – це номери горизонталей, нижній – вертикалей, перетин яких визначає положення тур на дошці. Відповідно, кількість розміщень дорівнює кількості перестановок із 8 елементів: $P_8 = 8!$.

1.2.4 Сполуки

В тих випадках, коли нас не цікавить порядок елементів в розміщенні, а цікавить лише його склад, говорять про сполуки. Сполуками із n різноманітних елементів по k називають всі можливі розміщення довжини k, утворені із цих елементів і відмінні один від одного складом, порядок елементів не суттєвий. Загальну кількість сполук позначають через C_n^k або $\binom{n}{k}$. Визначимо це число. Складемо всі сполуки із n по k. Потім переставимо в кожній сполуці елементи всіма можливими способами. Тепер ми отримали розміщення без повторень із n по k. Їх кількість дорівнює A_n^k. Враховуючи, що кожна сполука дає $k!$ розміщень, за правилом добутку можна записати $C_n^k \times k! = A_n^k$. Тоді $C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ або $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ і $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Задача. Скільки різних прямокутників можна вирізати із клітинок дошки, розмір якої $m \times n$?

1	2	3	...	n
2				
3				
...				
m				

Розв'язок. Прямокутник однозначно визначається положенням його сторін. Горизонтальні сторони можуть займати будь-яке із $m+1$ положень. Тоді кількість способів їх вибору дорівнює C_{m+1}^2. Вертикальні сторони можна вибрати C_{n+1}^2 способами. За правилом прямого добутку отримаємо, що кількість прямокутників дорівнює $C_{m+1}^2 \cdot C_{n+1}^2$.

1.2.5 Сполуки з повтореннями

Розглянемо елементи n різних видів. Кількість елементів кожного виду необмежена. Скільки існує розміщень довжини k, якщо не брати до уваги порядок елементів? Такі розміщення називаються сполуками з повтореннями, кількість та позначення яких наступне: $H_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k}$. Виведемо дану формулу.

Нехай $a, b, c, ..., d$ – це вхідні різні типи елементів, кількість яких n. Розглянемо сполуку з повтореннями $cbbcaccda...ddaccbbb$ із даних типів елементів. Оскільки порядок елементів в сполуках не враховується, то розміщення можна записати і так: $aa...a|bb...b|cc...c|...|dd...d$, де елементи кожного із типів впорядковані та закінчуються вертикальною рискою, за виключенням останньої серії елементів. Довжина такого розміщення з урахуванням вертикальних ліній складає $k+(n-1)=n+k-1$, де k – кількість елементів в розміщенні; $n-1$ – кількість вертикальних ліній. Очевидно, що будь-яке таке розміщення можна задати вибором із $n+k-1$ місця $n-1$ місця для положення вертикальних ліній. Це можна зробити C_{n+k-1}^{n-1} способами. Проміжні місця між лініями заповнюються відповідними типами елементів.

Задача. Троє хлопців зібрали в саду 63 яблука. Скількома способами вони можуть їх розділити між собою?

Розв'язок. Поставимо у відповідності кожному поділу яблук між хлопцями сполуку з повтореннями наступним чином. Типами елементів в нашому випадку будуть хлопці. Таким чином, маємо три типи елементів a, b, c $(n=3)$, із яких необхідно скласти всі можливі розміщення довжиною $k=63$. Наявність в розміщенні якогось із елементів a, b, c відповідає приналежності даного яблука відповідному хлопцеві. Порядок елементів в такому розміщені не істотний. При поділі яблук між хлопцями не важливо, яке з них попаде тому чи іншому хлопчикові. Тоді кількість способів поділити яблука між хлопцями дорівнює $H_3^{63} = C_{3+63-1}^{63} = C_{3+63-1}^{2} = \frac{65 \cdot 64}{2} = 2080$.

Задача. Знайти кількість цілочисельних розв'язків системи $x_1+x_2+...+x_n=k$, $k\geq 0$, $x_j\geq 0$, $j=1,2,...,n$; $n\geq 1$.

Розв'язок. Розглянемо наступну інтерпретацію розв'язку рівняння. Кожне значення $x_j=1_j+1_j+...+1_j$ представимо як суму одиниць, кількість яких x_j. Індекс у 1_j відмічає її належність до розкладу числа x_j. Таким чином, ми ввели n типів різних елементів $\{1_1,1_2,...,1_n\}$, значення кожного із них дорівнює одиниці. Тепер будь-який розв'язок вхідного рівняння можна представити як суму, складену із k вибіркових одиниць множини $\{1_1,1_2,...,1_n\}$. Сумуючи подібні одиниці 1_j з однаковими індексами, можна скласти відповідні складові x_j розв'язку вхідного рівняння. Дана відповідність є взаємно однозначною, звідки і випливає, що кількість розв'язків системи рівна кількості сполук з повтореннями $H_n^k=C_{n+k-1}^{n-1}=C_{n+k-1}^{k}$.

Задача. Знайдемо кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3=11$.

Розв'язок. Безпосереднє використання формули для сполук з повтореннями дає

$$H_3^{11}=C_{3+11-1}^{11}=C_{13}^{11}=\frac{13!}{11!2!}=\frac{12\cdot 13}{2}=78.$$

Кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1+x_2+...+x_r=n$ може бути визначена й у випадку, коли на змінні накладено певні обмеження.

Задача. Знайдемо кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3=11$ за умов $x_1\geq 1, x_2\geq 2, x_3\geq 3$.

Розв'язок. Очевидно, що ця задача є еквівалентною знаходженню розв'язка рівняння у невід'ємних цілих числах $x_1+x_2+x_3=5$ уже без обмежень. Справді, потрібно врахувати щонайменше 1 елемент першого типу, 2 елементи другого типу та 3 елементи третього типу – разом $1+2+3=6$ фіксованих елементів; отже, $11-6=5$ елементів залишиться для вільного вибору,

$$H_3^{5}=C_{3+5-1}^{5}=C_7^5=\frac{7!}{5!2!}=\frac{6\cdot 7}{2}=21.$$

Задача. Визначимо кількість розв'язків у невід'ємних цілих числах нерівності $x_1+x_2+x_3\leq 11$.

Розв'язок. Уведемо допоміжну змінну x_4, яка може набувати цілі невід'ємні значення, і перейдемо до еквівалентної задачі: визначимо кількість розв'язків у невід'ємних цілих числах рівняння $x_1+x_2+x_3+x_4=11$. Отже,

$$H_4^{11}=C_{4+11-1}^{11}=C_{14}^{11}=\frac{14!}{11!\,3!}=\frac{12\cdot 13\cdot 14}{2\cdot 3}=364.$$

1.2.6 Перестановки з повтореннями, мультимножини

Задача формулюється наступним чином. Розглядаються елементи k різних видів. Скільки існує перестановок із n_1 елементів першого типу, n_2 елементів другого типу, ..., n_k елементів k-го типу? Розглянемо, наприклад, ***мультимножину*** $M=\{a,a,a,b,b,c,d,d,d,d\}$, в якому є 3 елементи a, 2 елементи b, 1 елемент c та 4 елементи d. Мультимножина – це те ж саме, що і множина, але в ній допускаються однакові елементи. Повторення елементів можна вказати і наступним чином: $M=\{3a,2b,1c,4d\}$. Таким чином, перестановки з повтореннями – це перестановки елементів мультимножини. Якщо б ми розглядали всі елементи множини M як різні, позначивши їх $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,c_1,d_1,d_2,d_3,d_4$, то отримали б 10! перестановок, але після відкидання індексів частина з них були б однаковими. Фактично, кожна перестановка множини M зустрілась би рівно $3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 4!$ разів, оскільки в будь-якій перестановці M індекси при літерах a можна розташувати 3! способами, при b – 2! способами, при c – одним способом, а при d, відповідно, 4! способами. Тому кількість перестановок множини M дорівнює $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 4!}$. При застосуванні до загального випадку ті ж викладки доводять, що кількість перестановок будь-якої мультимножини (перестановок з повтореннями) рівна поліноміальному коефіцієнту

$$P(n_1,n_2,\dots,n_k)=\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!},$$

де $n=n_1+n_2+\dots+n_k$ – загальна кількість елементів.

Перестановки з повтореннями мають тісний зв'язок зі сполуками. Визначимо кількість цих перестановок наступним чином. Із всіх n місць перестановки n_1 місце займають елементи першого типу. Вибір місць для них можна зробити $C_n^{n_1}$ способами. Із інших $n-n_1$ місць елементи другого типу займають n_2 місця, які можна обрати $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами. Ті ж пояснення показують, що елементи k-го типу можна розмістити в перестановці $C_{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}^{n_k}$ способами. Згідно правила прямого добутку, кількість перестановок з повтореннями дорівнює

$$P(n_1,n_2,\dots,n_k)=C_n^{n_1}C_{n-n_1}^{n_2}\dots C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Задача. Скільки існує різних перестановок із букв слова "Уссурі"?

Розв'язок. $P(2у,1і,1р,2с)=\frac{6!}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!}=180$.

1.3 Впорядковане розбиття множин

Підрахуємо кількість розбиттів скінченої множини S, де $|S|=n$, на k різних підмножин $S=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_k$, які в свою чергу попарно не перетинаються, $|S_i|=n_i, i=1,2,\ldots,k$ та $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Послідовність різних підмножин $S_1,S_2,\ldots,S_k$ розглядається як впорядкована послідовність. При формуванні впорядкованої послідовності $S_1,S_2,\ldots,S_k$ підмножину S_1 можна обрати $C_n^{n_1}$ способами, підмножину S_2 можна обрати із $n-n_1$ елементів $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами і т. д., множину S_k можна обрати із $n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}$ елементів $C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$ способами. За правилом прямого добутку отримаємо, що загальна кількість впорядкованих розбиттів множини S на k підмножин рівна

$$C_n^{n_1}C_{n-n_1}^{n_2}\ldots C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!},$$

що співпадає з кількістю $P(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ перестановок з повтореннями.

Впорядковане розбиття множини S на підмножини $S=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_k$, що не перетинаються, допускає інтерпретацію в термінах "кошиків" та "шарів". Позначимо елементи вхідної множини $|S|=n$ "шарами". Під розбиттям вхідної множини (тепер множини шарів) на різні S_i впорядковані підмножини будемо розуміти розкладання шарів по k різним кошикам (впорядковані підмножини $S_1,S_2,\ldots,S_k$): n_1 шарів покласти в кошик S_1, n_2 шарів покласти в кошик S_2 і т.д., n_k покласти в кошик S_k, де $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Як встановлено, кількість таких розкладень дорівнює $C_n^{n_1}C_{n-n_1}^{n_2}\ldots C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

Задача. В студентській групі, яка складається із 25 людей, при виборі старости за висунуту кандидатуру проголосували 19 людей, проти – 3, утримались – 3. Скількома способами може бути проведено таке голосування?

Розв'язок. Маємо три різні кошика: "за", "проти" та "утримались", в які необхідно розкласти 25 шарів, відповідно 19 – в першу, 3 – в другу, 3 – в третю. Кількість таких розкладень визначається виразом $C_{25}^{19}\cdot C_6^3\cdot C_3^3=\dfrac{25!}{19!\cdot 3!\cdot 3!}=\dfrac{20\cdot 21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{2\cdot 3\cdot 2\cdot 3}=3542000$.

1.4 Невпорядковане розбиття множин

Підрахуємо, скількома способами можна розбити множину S, де $|S|=n$, на підмножини, серед яких для кожного $i=1,2,\ldots,n$ є $m_i \ge 0$ підмножин з i елементами. Тоді вірно, що $\sum_{i=1}^{n} i \cdot m_i = n$. Дане розбиття дозволяє представити вихідну множину наступним чином: $S=\bigcup_{j=1}^{m_1} S_{1j} \cup \bigcup_{j=1}^{m_2} S_{2j} \cup \ldots \cup \bigcup_{j=1}^{m_n} S_{nj} = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m_i} S_{ij}$, де підмножини S_{ij} – попарно не перетинаються і $|S_{i1}|=|S_{i2}|=\ldots=|S_{im_i}|=i$ для кожного $i=1,2,\ldots,n$. Порядок підмножин в розбитті не є суттєвим. Так, наприклад, розбиття множини $S=\{1,2,3,4,5\}$ вигляду

$\{1,3\},\{4\},\{25\}$;

$\{1,3\},\{25\},\{4\}$;

$\{25\},\{1,3\},\{4\}$;

$\{4\},\{1,3\},\{25\}$

вважаються однаковими.

Позначимо кількість невпорядкованих розбиттів множини S через $N(m_1,m_2,\ldots,m_n)$. Розглянемо схему формування впорядкованого розбиття для представлення $n=1\cdot m_1+2\cdot m_2+\ldots+n\cdot m_n$:

$$\underbrace{C_n^1 C_{n-1}^1 \cdots}_{m_1} \underbrace{C_{n-1m_1}^2 C_{n-1m_1-1}^2 \cdots}_{m_2} \underbrace{C_{n-1m_1-2m_2}^3 C_{n-1m_1-2m_2-1}^3 \cdots}_{m_3} \underbrace{C_{n-1m_1-2m_2-\ldots-(n-1)m_{n-1}}^n}_{m_n} =$$

$$= \frac{n!}{\underbrace{1!1!\ldots1!}_{m_1}\underbrace{2!2!\ldots2!}_{m_2}\ldots\underbrace{n!n!\ldots n!}_{m_n}} = \frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\ldots(n!)^{m_n}}.$$

Скористаємось інтерпретацією формування впорядкованого розбиття як розкладання n різних шарів по різних $m_1+m_2+\ldots+m_n$ кошиках так, що в кожний із m_i кошик кладуть i шарів. Тепер відмовимось від впорядкування підмножин в розбитті. Нехай всі кошики мають різну кількість шарів, такі кошики можна розглядати як різні (вони відрізняються кількістю шарів). В цьому випадку впорядковані та невпорядковані розбиття співпадають. Нехай тепер в розбитті існує m_i кошиків з однаковим числом шарів. При впорядкованому розкладанні такі кошики розглядаються як різні. Але при невпорядкованому розбитті обмін шарами таких кошиків можна розглядати як відповідну перестановку вказаних кошиків, що не приводить до нових розкладань. Якщо кількість кошиків з однаковим числом шарів дорівнює m_i, то невпорядкованих розбиттів буде в $m_i!$ раз менше, ніж впорядкованих. Тоді загальна кількість невпорядкованих розбиттів буде в $m_1!m_2!\ldots m_n!$ разів менша, ніж кількість впорядкованих.

Відповідно,

$$N(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\ldots(n!)^{m_n} m_1! m_2! \ldots m_n!}.$$

Задача. Скількома способами із групи 17 людей можна сформувати 6 коаліцій по 2 людини і 1 коаліцію із 5 людей?

Розв'язок. Необхідно розбити множину із 17 людей на невпорядковані групи, що не перетинаються. Звідки шукана кількість становить

$$N(0_1, 6_2, 0_3, 0_4, 1_5, 0_6, 0_7, \ldots, 0_{17}) = \frac{17!}{(2!)^6 (5!)^1 6! 1!}.$$

Задача. Скількома способами можна розділити колоду із 36 карт навпіл так, щоб в кожній пачці було по два тузи?

Розв'язок. 4 тузи можна розбити на $\frac{4!}{(2!)^2 2!} = 3$ різні коаліції по дві карти в кожній (невпорядковане розбиття), тобто тільки 3 способами можна розділити тузи пополам. Далі, кожна половина будь-якого із цих трьох розбиттів тузів виконує роль різних двох "кошиків", куди необхідно розкласти інші 32 карти. Розкладання 32 інших карт вже буде впорядкованим, а оскільки "кошики" різні, то число розкладань дорівнює $\frac{32!}{16!16!}$. Згідно правила прямого добутку, загальна кількість варіантів поділу колоди пополам дорівнює $\frac{4!}{(2!)^2 \cdot 2!} \cdot \frac{32!}{16! \cdot 16!} = \frac{3 \cdot 32!}{16! \cdot 16!}$.

1.5 Поліноміальна формула

Формула

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k} \qquad (2)$$

називається поліноміальною, де сумування виконується за всіма розв'язкам рівняння $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ в цілих невід'ємних числах, $n_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k$. Для доведення виконаємо множення

$$\underbrace{(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\ldots(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)}_{n} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n.$$

Щоб привести подібні доданки в отриманому виразі, необхідно підрахувати кількість одночленів виду $x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k}$ кожного розбиття $n_1+n_2+...+n_k=n$. Для отримання ж одночлена $x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k}$ необхідно обрати x_1 в якості множника в n_1 дужках при розкритті виразу $(x_1+x_2+...+x_k)^n$. Це можна зробити $C_n^{n_1}$ способами. Із інших $n-n_1$ не розкритих дужок необхідно вибрати x_2 в якості множника в n_2 дужках. Це можна зробити $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами і т.д. Тоді кількість одночленів $x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k}$ при розкритті дужок виразу

$$\underbrace{(x_1+x_2+...+x_k)(x_1+x_2+...+x_k)...(x_1+x_2+...+x_k)}_{n}$$

буде рівна числу $C_n^{n_1}C_{n-n_1}^{n_2}...C_{n-n_1-...-n_{k-1}}^{n_k}=\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$ впорядкованих розбиттів.

1.6 Біном Ньютона

Частковий випадок поліноміальної формули (2):

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k} \tag{3}$$

називається біномом Ньютона.

Розглянемо декілька задач, в основі розв'язування яких лежить біном Ньютона.

Задача. Довести рівність $\sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$.

Розв'язок. Використаємо формулу (3) бінома Ньютона, в якій покладемо $a=1$ та $b=1$, тоді $(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^k \cdot 1^{n-k}$.

Задача. Довести рівність $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^{n-k}=m^n$.

Розв'язок. Використаємо формулу (3), де покладемо $a=1$ та $b=m-1$.

Задача. Довести рівність $\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} C_n^{2k}=\sum_{k=1}^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} C_n^{2k-1}=2^{n-1}$.

Розв'язок. Використаємо формулу (3) бінома Ньютона, в якій покладемо $a=1$ та $b=-1$, тоді $(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k=0$. Групуючи додатні та від'ємні члени рівності, встановимо $\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} C_n^{2k}=\sum_{k=1}^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} C_n^{2k-1}$. Оскільки $\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} C_n^{2k}+\sum_{k=1}^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} C_n^{2k-1}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k=2^n$, то кожен із доданків $\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} C_n^{2k}$ та $\sum_{k=1}^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} C_n^{2k-1}$ складає половину числа 2^n.

Задача. Довести рівність $\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k=n2^{n-1}$.

Розв'язок. Використаємо формулу (3) бінома Ньютона, із якої, поклавши $a=1$ та $b=x$, отримаємо $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k$. Диференціювання останньої рівності дає $n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot x^{k-1}$. Нехай $x=1$, тоді $n(1+1)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot 1^{k-1}$, що доводить задану рівність.

1.7 Інверсії

Перестановки особливо важливі при вивченні алгоритмів сортування, оскільки вони слугують для представлення невпорядкованих вхідних даних. Щоб дослідити ефективність різних методів сортування, потрібно вміти підраховувати кількість повторень деякого кроку алгоритму.

Нехай $(a_1, a_2, ..., a_n)$ – перестановка елементів множини $\{1, 2, ..., n\}$. Якщо $i<j$, а $a_i>a_j$, то пара (a_i, a_j) називається інверсією перестановки. Наприклад, перестановка 3142 має три інверсії $(3,1),(3,2),(4,2)$. Кожна інверсія – це пара елементів, які "порушують порядок"; відповідно, єдина перестановка, яка не має інверсій, – це відсортована перестановка $(1, 2, ..., n)$.

Таблицею інверсії перестановки $(a_1, a_2, ..., a_n)$ називається послідовність $d_1 d_2 ... d_n$, де d_j – кількість елементів, більших за j, що знаходяться зліва від j. Іншими словами, d_j – кількість інверсій, в якій другий елемент рівний j. Наприклад, таблиця інверсій перестановки 591826473 буде 236402210, оскільки 5 і 9 знаходься лівіше 1; 5,9,8 – лівіше 2 і т. д. Всього 20 інверсій. За визначенням, $0 \le d_1 \le n-1,\ 0 \le d_2 \le n-2,\ \ ...,\ \ 0 \le d_{n-1} \le 1,\ \ d_n = 0$.

М. Холл встановив, що таблиця інверсій єдиним чином визначає відповідну перестановку. Із будь-якої таблиці інверсій $d_1 d_2 ... d_n$ можна однозначно відновити перестановку, котра породжує дану таблицю, шляхом послідовного визначення відносного розкладу елементів $n, n-1, ..., 1$ (в цьому порядку). Наприклад, перестановку, що відповідає таблиці інверсій $(2,3,6,4,0,2,2,1,0) = d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 d_9$, можна побудувати наступним чином: випишемо число 9; так як $d_8 = 1$, то 8 стоїть відносно 9 справа. Оскільки $d_7 = 2$, то 7 стоїть направо від 8 і 9. Так як $d_6 = 2$, то 6 стоїть направо відносно двох вже виписаних чисел; таким чином, отримали розташування 9,8,6,7. Припишемо тепер 5 зліва, так як $d_5 = 0$; розмішуємо 4 після вже виписаних чисел, 3 – після шести виписаних чисел (тобто в правий кінець) і отримаємо 5,9,8,6,4,7,3. Розмістивши аналогічним чином 2 і 1, прийдемо до перестановки $(5,9,1,8,2,6,4,7,3)$.

Така відповідність між перестановками і таблицями інверсій важлива, тому що часто можна замінити задачу, сформовану в термінах перестановок, на еквівалентну їй задачу, сформульованої в термінах таблиць інверсій. Розглянемо, наприклад, ще раз питання: скільки існує перестановок множини $\{1, 2, ..., n\}$? Відповідь повинна бути рівна кількості можливих таблиць інверсій, а їх легко перерахувати, оскільки d_1 можна вибрати n різними способами, d_2 можна незалежно від d_1 вибрати $n-1$ способами і т. д., d_n – одним способом. Тоді різних таблиць інверсій $n(n-1)...1 = n!$. Таблиці інверсій перерахувати досить легко, оскільки всі d_j незалежні, в той же час як елементи a_j перестановки повинні всі бути різними.

1.8 Зворотні перестановки

Не треба плутати інверсії перестановок із зворотними перестановками. Звернемося знову до термінології „шарів та кошиків”. Нехай $a_1, a_2, ..., a_n$ – різні шари, індекси яких поєднано з їх номерами. Тоді вихідний розклад шарів однозначно визначається відповідною перестановкою $e = (1, 2, ..., n)$. Нехай $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$ – деяка перестановка номерів $1, 2, ..., n$, де π_k – номер шару на k-му місці. Така перестановка відповідає розташуванню шарів $a_{\pi_1}, a_{\pi_2}, ..., a_{\pi_n}$. Згадаємо, що перестановка $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_n \end{pmatrix}$ може бути записана в матричному вигляді. Дана форма запису дозволяє розглядати перестановку в якості оператора, котрий заміняє старі номери шарів – верхній рядок матриці – на нові номери – нижній рядок матриці. Тоді результат двох послідовних змін $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$ і $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ вхідної послідовності $1, 2, ..., n$ номерів шарів можна розглядати як операцію множення перестановок

$$\rho = \pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & ... & \sigma_n \end{pmatrix}.$$

Впорядкуємо стовпці перестановки σ у відповідності з перестановкою $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$, тобто $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & ... & \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_n \\ \sigma_{\pi_1} & \sigma_{\pi_2} & ... & \sigma_{\pi_n} \end{pmatrix}$. Тоді можна записати, що $\rho = \pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_n \\ \sigma_{\pi_1} & \sigma_{\pi_2} & ... & \sigma_{\pi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma_{\pi_1} & \sigma_{\pi_2} & ... & \sigma_{\pi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \rho_1 & \rho_2 & ... & \rho_n \end{pmatrix}$. Цій перестановці відповідає розташування шарів $a_{\rho_1}, a_{\rho_2}, ..., a_{\rho_n}$, де значення $\rho_k = \sigma_{\pi_k}$ – це номер шару на k-му місці.

Зворотною до перестановки $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_n \end{pmatrix}$ називається перестановка $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi_1^{-1} & \pi_2^{-1} & ... & \pi_n^{-1} \end{pmatrix}$, яка отримується, якщо в кінцевій перестановці поміняти місцями рядки, а потім впорядкувати стовпці в зростаючому порядку за верхніми елементами, тобто $\pi^{-1} = (\pi_1^{-1}, \pi_2^{-1}, ..., \pi_n^{-1})$. Ясно, що послідовна зміна порядку шарів згідно перестановкам $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$ та зворотної $\pi^{-1}=\left(\pi_1^{-1},\pi_2^{-1},...,\pi_n^{-1}\right)$ приводить до їх вихідного розкладу, тобто до відповідної перестановки

$$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_n\\ 1 & 2 & ... & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ 1 & 2 & ... & n\end{pmatrix}.$$

Наприклад, зворотною до перестановки $(5,9,1,8,2,6,4,7,3)$ буде перестановка $(3,5,9,7,1,6,8,4,2)$, оскільки $\begin{pmatrix}5 & 9 & 1 & 8 & 2 & 6 & 4 & 7 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 3 & 5 & 9 & 7 & 1 & 6 & 8 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

2 ВИСНОВКИ

Виділимо шість основних комбінаторних схем.

2.1. Розміщення. Нехай є алфавіт, який складається з n елементів. З цих елементів складаються m-членні комбінації, причому кожний з n елементів може входити в комбінацію не більше одного разу і порядок елементів істотний. Такий тип комбінацій називається *розміщенням*. Кількість розміщень з n елементів по m визначається за формулою:

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (4)$$

2.2. Розміщення з повтореннями. Знову візьмемо алфавіт з n елементів і будемо утворювати m-членні комбінації, допускаючи повторення кожного елемента від 0 до m разів. Порядок елементів залишається істотним. Такі комбінації елементів називаються *розміщеннями з повтореннями,* їх загальна кількість знаходиться за формулою

$$\widetilde{A}_n^m=n^m. \qquad (5)$$

2.3. Перестановки. Нехай розміщення з n різних елементів взяті по n елементів, тобто кожне розміщення містить всі n елементів алфавіту і відрізняється від інших тільки порядком цих елементів. Такі розміщення називаються *перестановками*. Тоді з формули (4) можна отримати формулу для знаходження кількості перестановок. Для цього потрібно замінити m на n і врахувати, що $0!=1$. Дійсно,

$$P_n=A_n^n=\frac{n!}{(n-n)!}=n!. \qquad (6)$$

Визначимо, наприклад, скільки речень можна скласти з трьох слів: сьогодні, іде, дощ. Кількість речень тут дорівнює кількості перестановок з трьох елементів: $P_3=2\cdot 3=6$.

Зауважимо, що оскільки перестановка є частинним випадком розміщень, то порядок елементів істотний.

2.4. Перестановки з повтореннями. У тих випадках, коли проміж елементів, що утворюють перестановки є однакові, одержуються комбінації, які називаються *перестановками з повтореннями*. Кількість цих перестановок обчислюється за формулою

$$p_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}, \qquad (7)$$

де n – загальна кількість елементів, що входять у перестановку, а n_1, n_2, ..., n_k – кількість однакових елементів відповідно першого, другого, ..., k-го типів.

Визначимо, наприклад, кількість перестановок з повтореннями, які можна одержати з букв, що утворюють словоформу математика:

$$P_{10}(3, 2, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 151200.$$

2.5. Сполуки. У розміщеннях з n елементів по m комбінації різняться або елементами, або порядком їхнього запису, або і елементами і порядком. Якщо порядок елементів не враховувати, то отримаємо *сполуки* з n елементів по m. Очевидно, що з кожної такої сполуки можна отримати $P_m = m!$ розміщень, які складаються з однакових елементів і відрізняються тільки порядком елементів. Звідси та з формули (2.1), випливає, що кількість сполук з n елементів по m дорівнює

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = C_n^{n-m}. \qquad (8)$$

2.6. Сполуки з повтореннями. *Сполуками* з n елементів по m *з повтореннями* називаються такі комбінації, які включають m з n різних елементів за умови, що один і той самий елемент може включатись у комбінацію декілька разів. Порядок елементів неістотний. Кількість сполук n елементів по m з повтореннями визначається за формулою

$$H_n^m = C_{n+m-1}^m. \qquad (9)$$