

Лабораторна робота № 3

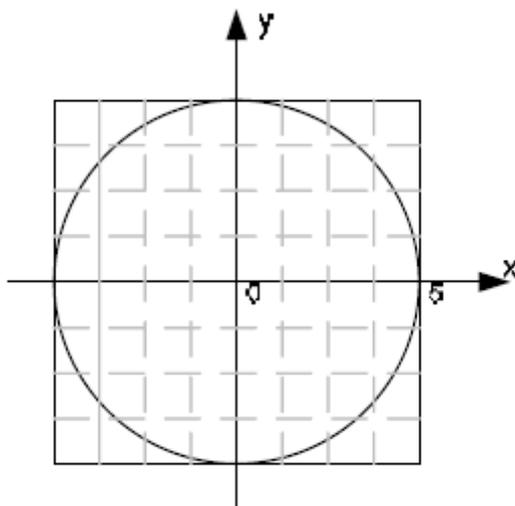
Імітаційне моделювання для розв'язання інженерно-обчислювальних задач (методом Монте-Карло)

Подготовительная часть.

Для выполнения лабораторной работы необходимо повторить следующие вопросы:

1. Вычисление площади фигуры, ограниченной кривыми.
2. Понятие и расчет доверительного интервала.
3. Теоретическая часть (лекция 21 + лекции 22-27).

Пример 1. Пусть требуется определить площадь круга известного диаметра с помощью выборки из значений случайной величины. Впишем круг в квадрат; таким образом, стороны квадрата будут равны диаметру круга. Пусть круг имеет радиус $r=5$ см и его центр в точке $(0,0)$.



Уравнение окружности будет иметь вид $x^2+y^2=25$

Описанный квадрат определяется его вершинами $(-5, 5)$, $(5, 5)$, $(5, -5)$ и $(-5, -5)$, которые получаются непосредственно из геометрических свойств фигуры. Любая точка (x, y) внутри квадрата или на его границе должна удовлетворять неравенствам $-5 \leq x \leq 5$ и $-5 \leq y \leq 5$.

Применение выборок при использовании метода Монте-Карло основано на предположении, что все точки в квадрате $-5 \leq x \leq 5$ и $-5 \leq y \leq 5$ могут появляться с одинаковой вероятностью, т. е. x и y распределены равномерно с плотностями вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 1/10, & -5 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} 1/10, & -5 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Определим теперь точку (x, y) в соответствии с распределениями $f(x)$ и $f(y)$. Продолжая этот процесс, подсчитаем число точек, попавших внутрь круга или на окружность. Предположим, что выборка состоит из n наблюдений и m из n точек попали внутрь круга или на окружность. Тогда

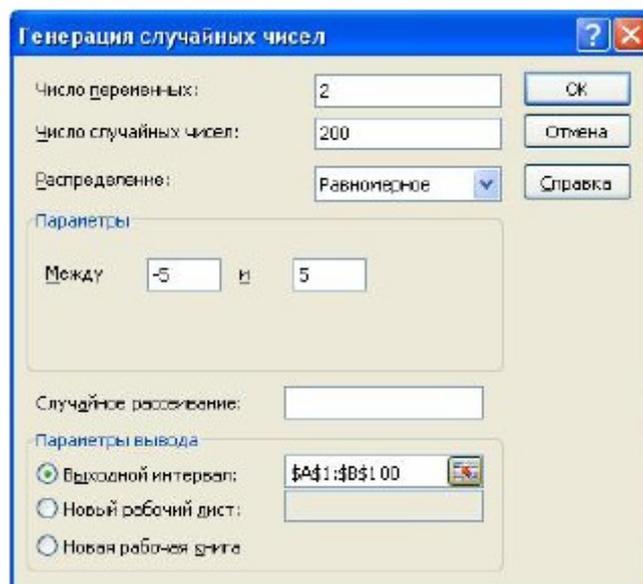
*оценка площади круга = m/n (площадь квадрата) = $(m/n) * (10 * 10)$*

Подобный способ оценивания площади круга можно обосновать тем, что в процессе получения выборки любая точка (x, y) может с одинаковой вероятностью попасть в любое место квадрата. Поэтому отношение m/n представляет оценку площади круга относительно площади квадрата.

1. Использование Excel (LibreOffice Calc, Gnumeric) для постановки эксперимента.

1.1. Excel

Для получения выборки случайных чисел с заданным распределением можно



воспользоваться функцией «Генерация случайных чисел» из меню «Анализ данных».

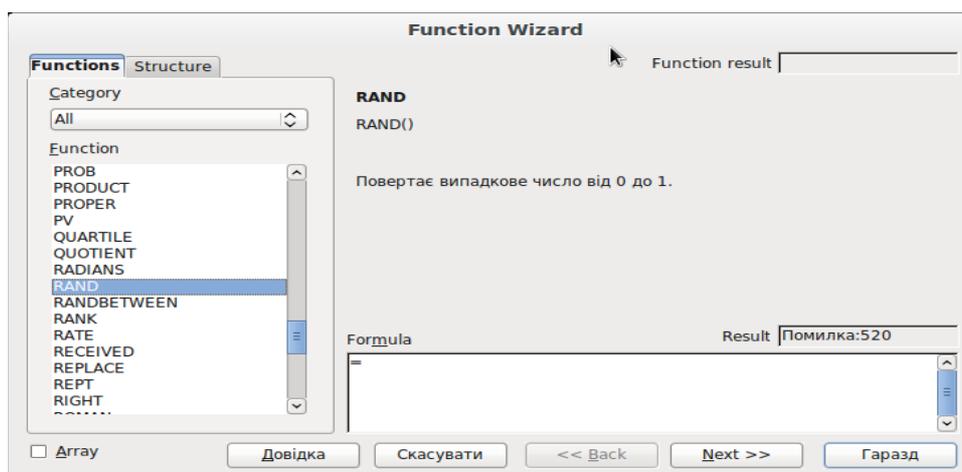
	A	B	C
1	-2,69432660908841	-1,50318918424024	=ЕСЛИ(A1*A1+B1*B1<=25;1;0)
2	0,62639240699484 2	-4,30265205847346	=ЕСЛИ(A2*A2+B2*B2<=25;1;0)
3	-4,60478530228584	-1,3075655384991	=ЕСЛИ(A3*A3+B3*B3<=25;1;0)
4	-4,74211859492782	0,30716879787591 2	=ЕСЛИ(A4*A4+B4*B4<=25;1;0)
5	3,57356486709189	-4,41953794976653	=ЕСЛИ(A5*A5+B5*B5<=25;1;0)

...

14 8	-4,65086825159459	2,68517105624561	=ЕСЛИ(A148*A148+B148*B148<=25;1;0)
14 9	-3,85921811578722	-4,19644764549699	=ЕСЛИ(A149*A149+B149*B149<=25;1;0)
15 0	2,46147038178655	3,33826715903195	=ЕСЛИ(A150*A150+B150*B150<=25;1;0)
15 1		число попаданий	=СУММ(C1:C150)
15 2		число наблюдений	=СЧЁТ(C1:C150)
15 3		площадь круга	=(C151/C152)*100

1.2. LibreOffice Calc

В LibreOffice для генерации случайных чисел используются функции RAND та RANDBETWEEN:



а также инструкция в макроязыке Basic, которая инициализирует генератор случайных чисел

[Randomize \[Число\]](#)

Любое целое число, которое инициализирует генератор случайных чисел. Если

параметр "Число" опущен, используется текущее значение системного таймера.

Пример:

```
Sub ExampleRandomize
Dim iVar As Integer, sText As String
Dim iSpectral(10) As Integer
Randomize 2^14-1
For iCount = 1 To 1000
iVar = Int((10 * Rnd) ) REM Диапазон от 0 до 9
iSpectral(iVar) = iSpectral(iVar) +1
Next iCount
sText = " | "
For iCount = 0 To 9
sText = sText & iSpectral(iCount) & " | "
Next iCount
MsgBox sText,0,"Спектральное распределение"
end sub
```

1.3. Gnumeric

Следующая интересная возможность генерации исходных данных – заполнение диапазона ячеек случайными числами с различными функциями плотности распределения. Всего предлагается около 30 вариантов. Для использования этой возможности полезно иметь выделенный диапазон ячеек (блок). Можно реализовать двумерное поле случайных чисел, если выделить не часть строки или столбца, а прямоугольный диапазон и сделать соответствующие настройки в диалоге «Генерация случайных чисел» («Правка/Заполнить/Генерация случайных чисел...», рис. 1).

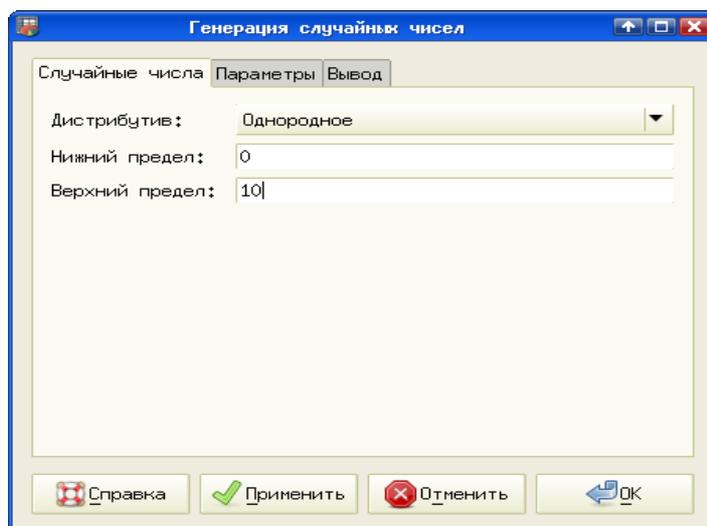


Рисунок 1. Диалог генерации случайных чисел в Gnumeric (равномерное распределение)

Диалог «Генерация случайных чисел» также имеет три вкладки.

- Вкладка «Случайные числа» позволяет определить вид функции плотности распределения (неудачно названный словом «дистрибутив»), а также параметры этой функции. Для разных распределений количество и значения параметров будут разными.
- Вкладка «Параметры» позволяет определить размер выборки (сколько чисел нужно) и количество переменных (1-мерная последовательность или 2-мерное поле). Если предварительно выделен диапазон ячеек, размер выборки устанавливается автоматически.
- Вкладка «Вывод» позволяет (как и в предыдущем случае) указать диапазон вывода полученной серии значений. По умолчанию вывод происходит в выделенный диапазон ячеек (если он есть) или начиная с активной ячейки. Однако можно сформировать серию на новом листе или открыть новый документ Gnumeric (книгу) и создать серию значений там.

В качестве примера создадим три вектора из 100 случайных чисел с разными распределениями: равномерным в диапазоне от 0 до 10 (как на рис. 1), нормальным со средним значением 5 и стандартным отклонением 2, а также с распределением χ^2 со значением параметра $\nu=2$. Для полученных результатов установим формат с 4-мя десятичными знаками (рис. 2)

	А	В	С	Д
1	Генерация случайных чисел			
2	Равномерное	Нормальное	Chi-квадрат	
3	3,5215	4,1070	1,0284	
4	2,2043	2,9831	0,8274	
5	5,4872	6,9444	1,1866	
6	9,6423	5,1187	0,1518	
7	1,6817	6,7977	0,6176	
8	7,0084	8,4337	2,0553	
9	7,2888	9,3311	0,9406	
10	0,7312	1,9206	0,2733	
11	5,7347	3,9104	0,7215	
12	2,2740	4,8930	1,4979	
13	7,4336	3,2952	0,6764	
14	4,5522	5,7443	0,1311	
15	4,2461	2,8635	2,5090	
16	8,8224	6,4100	2,9347	
17	0,2124	4,9169	1,1188	
18	4,4424	4,7765	0,4385	
19	7,4021	4,5417	2,7815	
20	5,3035	6,1519	0,6666	
21	7,9344	2,3908	2,6562	
22	4,1669	4,9635	8,2444	

Рисунок 2. Три вектора случайных чисел

Рассмотренные возможности по генерации исходных данных будут полезны при дальнейшей реализации лабораторной работы в пакете Gnumeric.

2. Моделирование рисков методом Монте-Карло в Gnumeric

В состав Gnumeric входит средство для моделирования по методу Монте-Карло. При использовании метода Монте-Карло используются выборки случайных чисел для решения задач, в которых течение времени не играет существенной роли. Другими словами, на очередную выборку не влияют предыдущие выборки.

При моделировании по методу Монте-Карло используются функции генерации случайных чисел, а результаты представляются вместе со статистическими характеристиками, которые можно затем анализировать.

В данной главе рассмотрен пример из официального руководства по Gnumeric, причём исправлены некоторые ошибки и неточности.

2.1. Общее описание задачи

Одна из классических расчётных задач – задача о продавцах газет. Продавцы покупают газеты за 33 цента каждую и продают по 50 центов. Непроданные газеты идут на макулатуру по 5 центов за штуку. Газеты продаются распространителям пачками по 10 штук. Спрос на газеты может быть поделён на «замечательный», «нормальный» и «плохой» с вероятностями 0.35, 0.45 и 0.20 соответственно, причём текущий спрос не зависит от предыдущего дня. Задача продавца – определить оптимальное количество газет в ситуации, когда спрос не вполне известен, то есть добиться устойчивого дохода.

Уравнение для определения дневного дохода для продавца выглядит следующим образом:

$$\text{Доход} = [(\text{Выручка}) - (\text{Себестоимость}) + (\text{Макулатура})]$$

Остаётся добавить, что количество закупленных от поставщика газет может изменяться от 40 до 100 включительно, а количество проданных газет также кратно 10.

2.2. Построение модели

для построения модели в Gnumeric будем использовать два листа - лист «Доход» для вычисления дохода и лист «Таблицы спроса» для таблиц, требуемых для модельных наборов данных, задающих параметры спроса.

На листе «Доход» создадим таблицу расчёта дохода, как показано на рис. 3.

	А	В	С	Д	Е
9	Вычисление дохода				
10					
11	Переменные	выручка	себестоимость	макулатура	доход
12	Значение	25	16,5	0	
13	Коэффициент	0,5	0,33	0,05	
14					
15	Данные	Количество			
16	Закупка	50			

Рисунок 3. Исходная таблица вычисления дохода

Таблицу для вычисления дохода начнём с девятой строки. У нас есть три переменные – выручка от продаж, себестоимость газет и стоимость макулатуры, для которых на каждую единицу товара заданы коэффициенты 0.5, 0.33 и 0.05 соответственно. Запишем эти коэффициенты в ячейки от B13 до D13. В ячейках от B12 до D12 запишем формулы для

дохода от продаж, себестоимости и стоимости макулатуры, как показано в таблице 1. В ячейке E12 запишем формулу для вычисления прибыли.

Таблица 1

Адрес ячейки	Значение или формула
B12	=B13*min(B16;B20)
C12	=C13*B16
D12	=D13*max(0;B16-B20)
E12	=B12-C12+D12
B13	0,5
C13	0,33
D13	0,05
B16	50

Нужно заметить, что на этом этапе в некоторых ячейках появятся сообщения «N/A!» («нет данных»). Как только модель будет построена полностью, эти сообщения исчезнут.

В ячейке B20 будет задаваться случайное количество проданных газет («спрос»). Поскольку нельзя продать больше, чем закуплено у поставщика, выручка определяется количеством проданных газет, если закуплено больше, чем продано и ограничивается количеством закупленных газет, если спрос превышает это количество (функция min() при расчёте выручки).

Формула в ячейке D12 означает, что в макулатуру можно сдать только непроданные газеты, поэтому если всё продано (а также если спрос превышает количество закупленных газет), то количество макулатуры будет 0.

Начальное количество закупленных газет установим в 50.

Далее на листе «Таблицы спроса» сформируем модельные параметры спроса в соответствии с рис. 4, 5 и 5.

Термин «вероятность» в рассматриваемом примере означает значение функции плотности распределения, а «интегральная вероятность» – значение функции распределения.

	A	B	C	D	E
1					
2					
3	Итог дня	Вероятность	Интегральная вероятность		
4	Занчительно	0,35	0,35		
5	Нормально	0,45	0,8		
6	Плохо	0,2	1		
7					

Рисунок 4. Распределение уровней спроса

	A	B	C	D
9				
10	Распределение ежедневного спроса на газеты			
11	Спрос	Замечательно	Нормально	Плохо
12	40	0,03	0,1	0,44
13	50	0,05	0,18	0,22
14	60	0,15	0,4	0,16
15	70	0,2	0,2	0,12
16	80	0,35	0,08	0,06
17	90	0,15	0,04	0
18	100	0,07	0	0
19				

Рисунок 5. Распределение спроса в зависимости от количества газет

	A	B	C	D	E	F	G
19							
20	Функции распределения спроса						
21		Интегральная вероятность			Значения		
22	Спрос	Замечательно	Нормально	Плохо	Замечательно	Нормально	Плохо
23	40	0,03	0,1	0,44	0	0	0
24	50	0,08	0,28	0,66	0,03	0,1	0,44
25	60	0,23	0,68	0,82	0,08	0,28	0,66
26	70	0,43	0,88	0,94	0,23	0,68	0,82
27	80	0,78	0,92	1	0,43	0,88	0,94
28	90	0,93	1		0,78	0,92	1
29	100	1			0,93	1	
30							

Рисунок 6. Функции распределения спроса

На рис. 4 показаны плотность распределения и значения функции распределения уровней спроса, на рис 5 – функции плотности распределения вероятности продажи заданного количества газет для каждого из вариантов спроса, а на рис. 6 – вспомогательные функции распределения вероятностей спроса.

Дополнительными допущениями является то, что 40 газет будут проданы при любых условиях, а вот 100 – только при наиболее благоприятных обстоятельствах.

Теперь снова перейдём на лист «Доход» и продолжим ввод формул, нужных для работы модели. Адреса ячеек и соответствующие формулы показаны в таблице 2.

Таблица 2

Адрес ячейки	Значение или формула
B17	=rand()
C17	=if(B17<'Таблицы спроса'!C4;"Замечательно";if(B17<'Таблицы спроса'!C5;"Нормально";"Плохо"))
B18	=rand()
B20	=lookup(C17;\$B\$23:\$D\$23;\$B\$24:\$D\$24)
B21	=E12
B23	Замечательно
C23	Нормально
D23	Плохо
B24	=lookup(B18;'Таблицы спроса'!\$E\$23:\$E\$29;'Таблицы спроса'!\$A\$23:\$A\$29)
C24	=lookup(B18;'Таблицы спроса'!\$F\$23:\$F\$29;'Таблицы спроса'!\$A\$23:\$A\$29)
D24	=lookup(B18;'Таблицы спроса'!\$G\$23:\$G\$29;'Таблицы спроса'!\$A\$23:\$A\$29)

Случайное число в ячейке B17 определяет уровень (состояние) спроса, который выводится в ячейку C17. Случайное число в ячейке B18 определяет количества проданных газет для каждого уровня спроса (ячейки B24, C24 и D24). В соответствии с ранее заданным в C17 уровнем спроса в ячейке B20 получаем текущий спрос на газеты, из которого уже рассчитывается доход.

Итоговый вариант листа «Доход» должен выглядеть примерно так, как показано на рис. 7.

	А	В	С	Д	Е
9	Вычисление	дохода			
10					
11	Переменные	выручка	себестоимость	макулатура	доход
12	Значение	25	16,5	0	8,5
13	Коэффициент	0,5	0,33	0,05	
14					
15	Данные	Количество			
16	Закупка	50			
17	Итого дня	0,6873233079327	Нормально		
18		0,3227079860445			
19	Результат				
20	Спрос	60			
21	Доход	8,5			
22					
23		Замечательно	Нормально	Плохо	
24		70	60	40	
25					

Рисунок 7. Итоговый лист для вычисления дохода

Нажимая на клавишу F9 («Правка/Пересчитать» в главном меню) можем наблюдать за изменением чисел и, соответственно, за изменением дохода.

2.3. Использование модели

Понятно, что наблюдать за изменениями чисел в ячейках ЭТ при пересчёте очень увлекательно, но не очень продуктивно. Инструмент моделирования в SpineGic («Сервис/Моделирование...» в главном меню) позволяет автоматически проделать большое число пересчётов и проанализировать получаемые результаты.

При вызове инструмента моделирования появляется диалог «Моделирование рисков», как обычно содержащий несколько вкладок.

Вкладка «Переменные» (рис. 9) обеспечивает определение диапазонов входных и выходных данных. Для рассматриваемого примера эти диапазоны должны быть определены в соответствии с рис. 9.

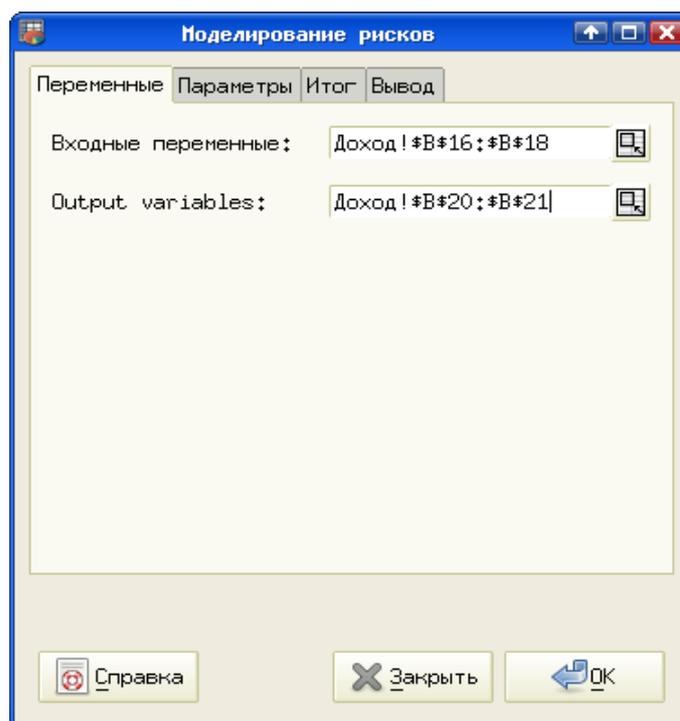


Рисунок 8. Определение диапазонов для входных и выходных данных

На вкладке «Параметры» (рис. 8) настраивается режим вычислений – определяется количество вариантов модели («Rounds»), количество пересчётов (итераций) для каждого варианта и предел времени, в течение которого проводятся вычисления (в секундах). Предел времени нужен для предотвращения слишком длительной загрузки вычислительной системы. Если модель очень сложна или составлена некорректно, вычисления прекратятся по достижении этого предела времени.

Использование вариантов модели («Rounds») будет рассмотрено позднее.

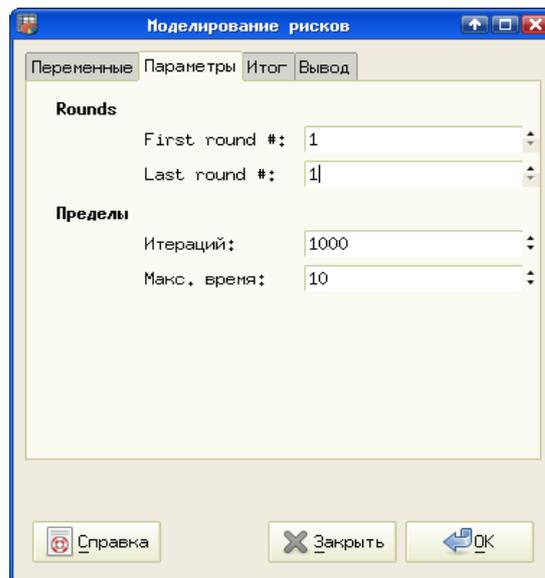


Рисунок 9. Настройки вычислений

Вкладка «Вывод» (рис. 10) является традиционной для Gnumeric и позволяет задать расположение результатов работы программы. В нашем случае целесообразно использовать вариант «Новый лист».

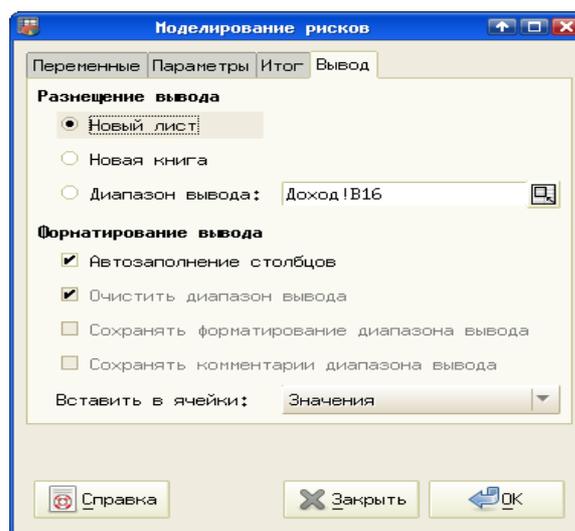


Рисунок 10. Настройка расположения результатов моделирования

После нажатия на кнопку «ОК» в диалоге «Моделирование рисков» диалоговое окно не

закрывается, и на вкладке «Итог» можно увидеть, что появились какие-то результаты (рис. 11).

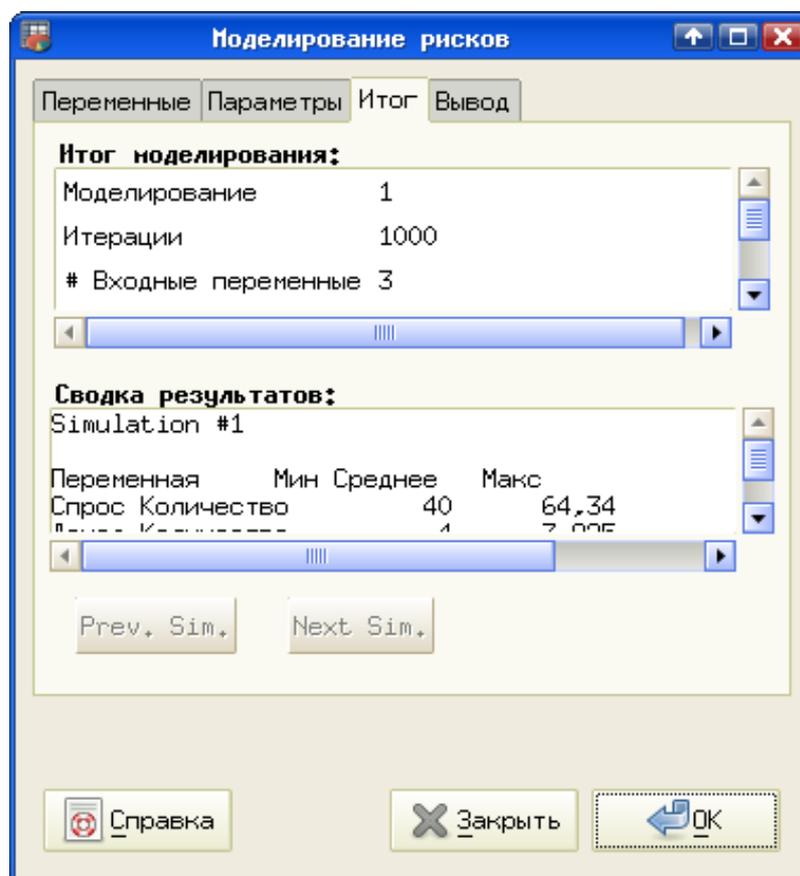


Рисунок 11. Результаты моделирования в диалоговом окне

В области «Сводка результатов:» вкладки «Итог» можно увидеть значения переменных, полученные в результате выполнения указанного в области «Итог моделирования» количества итераций. Изучать эти значения в области вкладки диалогового окна не очень удобно, поэтому имеет смысл закрыть диалог и посмотреть результаты на появившемся в книге ЭТ листе «Отчёт о моделировании» (рис. 12).

	A	B	C	D	E		
1		gnumeric	Моделирование рисков 1.10.5	Отчет			
2		Книга:	[file:///mnt/win_d/gnumeric-book/simulation.gnumeric]	Доход			
3		Отчёт создан:	Sun Oct 10 14:33:05 2010				
4							
5							
6		ИТОГО					
7			Мин	Среднее	Макс		
8		Спрос	Количество	40	64,34	100	
9		Доход	Количество	4	7,825	8,5	
10		(Ввод)	Закупка	Количество	50	50	
11		(Ввод)	Итог дня	Количество	5,702740021134E-05	0,50254637421886	0,9995027511702
12		(Ввод)	Количество		0,00012427875973	0,50664222257099	0,9991930672988

Рисунок 12. Фрагмент листа с отчётом о моделировании

В правой части этого листа имеется ещё несколько статистических параметров, полученных в результате вычислений. Их можно получить, проделав все описанные выше действия, а назначение этих параметров (на английском языке) описано в оригинальном руководстве по Gnumeric, поэтому здесь они не приводятся.

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: «Если продавец будет покупать 50 газет, то его доход будет варьироваться от 4 до 8,5 у.е. и в среднем будет составлять 7,825 у.е. Доход будет не менее 4 у.е. в самых неблагоприятных условиях, но не более 8,5 у.е. – в самых благоприятных».

Теперь можно проделать аналогичные действия, установив количество закупаемых от поставщика газет (ячейка B16 на листе «Доход») в 50, 60 и т. д. Однако процесс перебора количества закупаемых газет тоже можно автоматизировать. Для этого в Gnumeric имеется функция `SIMTABLE()`, находящаяся в категории «Случайные числа».

Для того, чтобы просчитать модель с различными количествами закупаемых газет, запишем в ячейку B12 формулу `=simtable(50;60;70;80;90)` (крайние случаи с количествами 40 и 100 брать не будем).

Поскольку в этом случае имеется 5 вариантов модели, то на вкладке настройки режима вычислений диалога «Моделирование рисков» требуется изменить значение «Last round #:» в соответствии с количеством аргументов функции `SIMTABLE()` (рис. 13).

Следует заметить, что номера вариантов совпадают с номерами аргументов функции `SIMTABLE()`. Поэтому, если хочется посмотреть, что будет при количествах закупленных газет от 60 до 80, то в качестве параметра «First round #:» нужно поставить 2, а для «Last round #:» – 4.

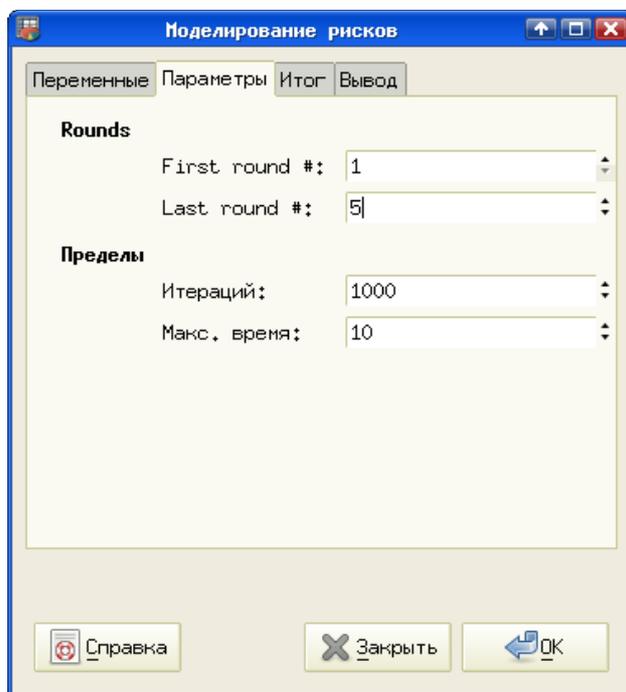


Рисунок 13. Настройка вычислений для нескольких вариантов модели

После нажатия на кнопку «ОК» на вкладке «Итог» окажутся активными кнопки «Next

Sim.» и «Prev. Sim» (рис. 14), которые позволяют в области «Сводка результатов» видеть результаты по каждому варианту модели (при каждом значении количества закупленных газет из набора значений, определённых в качестве аргументов функции SIMTABLE ()).

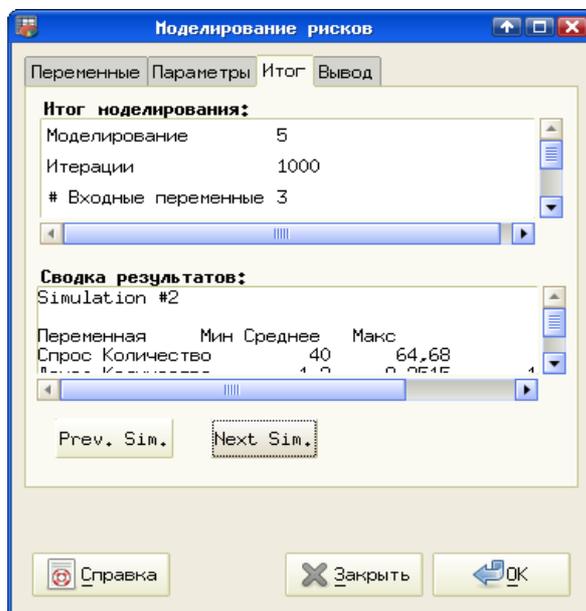


Рисунок 14. Просмотр результатов по вариантам модели

Полная сводка результатов отображается на листе «Отчёт о моделировании» (рис. 15), на котором поместился только фрагмент сводки результатов, поэтому основные результаты приведены в таблице 3.

	A	B	C	D	E
6		SUMMARY OF SIMULATION ROUND #1			
7			Мин	Среднее	Макс
8	Спрос	Количество	40	64,41	100
9	Доход	Количество	4	7,8205	8,5
10	(Ввод)	Закупка Количество	50	50	50
11	(Ввод)	Итого дня Количество	0,003352172062	0,498789753087	0,999636536864
12	(Ввод)	Количество	0,000578942701	0,499960621012	0,998962741086
13					
14					
15		SUMMARY OF SIMULATION ROUND #2			
16			Мин	Среднее	Макс
17	Спрос	Количество	40	64,68	100
18	Доход	Количество	1,2	8,2515	10,2
19	(Ввод)	Закупка Количество	60	60	60
20	(Ввод)	Итого дня Количество	0,000345595932	0,489356043302	0,998794125497
21	(Ввод)	Количество	0,001553605354	0,497441035969	0,999672653996
22					
23					
24		SUMMARY OF SIMULATION ROUND #3			
25			Мин	Среднее	Макс
26	Спрос	Количество	40	63,9	100
27	Доход	Количество	-1,6	7,364	11,9
28	(Ввод)	Закупка Количество	70	70	70
29	(Ввод)	Итого дня Количество	0,000806831029	0,500545577640	0,999709810391
30	(Ввод)	Количество	0,001793650310	0,495337517129	0,999865479445
31					
32					
33		SUMMARY OF SIMULATION ROUND #4			
34			Мин	Среднее	Макс
35	Спрос	Количество	40	65,19	100
36	Доход	Количество	-4,4	6,2065	13,6

Рисунок 15. Результаты моделирования по вариантам входных данных

Из таблицы 3 видно, что закупка 60 газет даёт наиболее надёжный доход – средний

доход максимален и никогда не получается убытка.

При увеличении количества закупаемых газет растёт возможный максимальный доход, однако средний доход уменьшается и возрастает риск убытков.

Очевидно, что такой результат получается при параметрах модели, заданных на листе «Таблицы спроса». При других вероятностях и распределениях вероятностей результаты также будут отличаться.

Таблица 3: Краткий итог моделирования

Закуплено газет	Доход, у.е.		
	Минимальный	Средний	Максимальный
50	4	7,82	8,5
60	1,2	8,25	10,2
70	-1,6	7,36	11,9
80	-4,4	6,21	13,6
90	-7,2	3,91	15,3

3. Использование MathCad для постановки эксперимента.

Для решения аналогичной задачи в системе MathCad можно воспользоваться программным модулем с использованием функции $\text{rnd}(x)$, возвращающей случайное число в диапазоне от 0 до x . В данном модуле n – число наблюдений.

```
F(n) :=  $\left\{ \begin{array}{l} m \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 1..n \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leftarrow \text{rnd}(10) \\ y \leftarrow \text{rnd}(10) \\ x \leftarrow x - 5 \\ y \leftarrow y - 5 \\ m \leftarrow m + 1 \text{ if } x^2 + y^2 \leq 25 \end{array} \right. \\ S \leftarrow \frac{m}{n} \cdot 100 \end{array} \right.$ 
```

4. Использование Matlab для постановки эксперимента.

Для решения данной задачи в системе Matlab можно воспользоваться следующей М-функцией:

```
function[s]=sum(n)
m=0;
for i=1:n
    x=Random('unif',-5,5);
    y=Random('unif',-5,5);
    if x*x+y*y<=25
        m=m+1;
    end;
end;
s=(m/n)*100;
```

Здесь параметр 'unif' функции Random позволяет получить равномерно распределенное случайное число.

5. Обработка результатов

Для изучения влияния статистической ошибки при моделировании задача решалась для различных значений n , равных 150, 200, 500, 1000, 2000, 5000 и 10 000. Кроме того, при каждом n было проведено 10 прогонов, в каждом из которых использовались различные последовательности случайных чисел из интервала $[-5, 5]$.

Номер прогона	Оценки площади круга при данном числе испытаний n					
	150	200	500	1000	2000	5000
1	76	80,5	76	78,6	79,55	78,32
2	82	79,5	79,6	78,8	78,85	79,26
3	86	81,5	76,6	77,6	79,1	77,22
4	75	82	78,8	80	79,55	79,34
5	77	72	76,2	79,8	79,4	79,22
6	81	77,5	76,6	77,6	77,4	77,44
7	75	81,5	80,4	78,5	78,1	79,28
8	74	76,5	81,8	79,7	77,2	78,82
9	71	80,5	76,6	76,4	77,76	78,74
10	84	72	81,2	78	78,4	77,74
Среднее	78,1	78,35	78,38	78,5	78,531	78,538
Дисперсия	23,65556	14,28056	5,035111	1,306667	0,789499	0,658618

Расчетное значение

78,54

В таблице приведены результаты эксперимента, исходя из которых можно сделать следующие заключения.

1. С ростом числа генерируемых точек (т. е. продолжительности прогона модели) оценки площади круга приближаются к точному значению (78,54 см²). На рис. 2 показаны оценки площади прогонов 1 и 2 в зависимости от продолжительности прогона n. Мы видим, что сначала оценки колеблются около точного значения, а затем стабилизируются.

Это условие обычно достигается после повторения эксперимента достаточное количество раз.

Наблюдаемое явление типично для результатов любой имитационной модели. Обычно в большинстве имитационных моделей нас интересуют результаты, полученные в стационарных условиях.

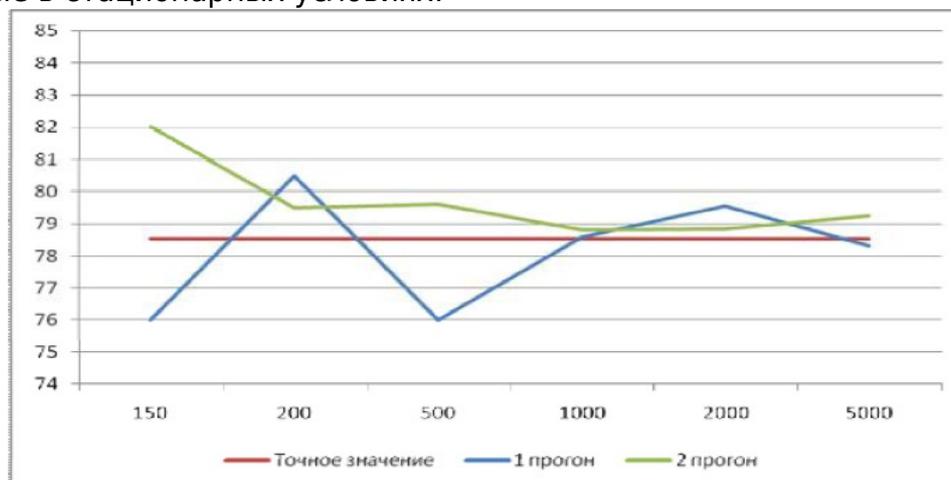


Рис. 2

2. Влияние переходных условий уменьшается, если усреднить результаты 10 серий. Это иллюстрирует рис. 3, на котором показана зависимость среднего от n. Кроме того, на рисунках видно, что для каждого n при достижении стационарных

условий дисперсия убывает. При возрастании n от 150 до 200 дисперсия резко уменьшается с 23,66 до 14,25.

За исключением этого интервала, столь резкого уменьшения дисперсии нигде больше не наблюдается. Последнее замечание указывает на то, что существует предел, за которым увеличение продолжительности прогона модели уже не дает существенного повышения точности результата, измеряемой дисперсией. Это замечание представляется чрезвычайно важным, поскольку затраты на эксплуатацию имитационной модели прямо пропорциональны продолжительности прогонов. Поэтому желательно найти компромисс между большой точностью (т. е. малой дисперсией) и небольшими затратами на процедуру получения результатов.

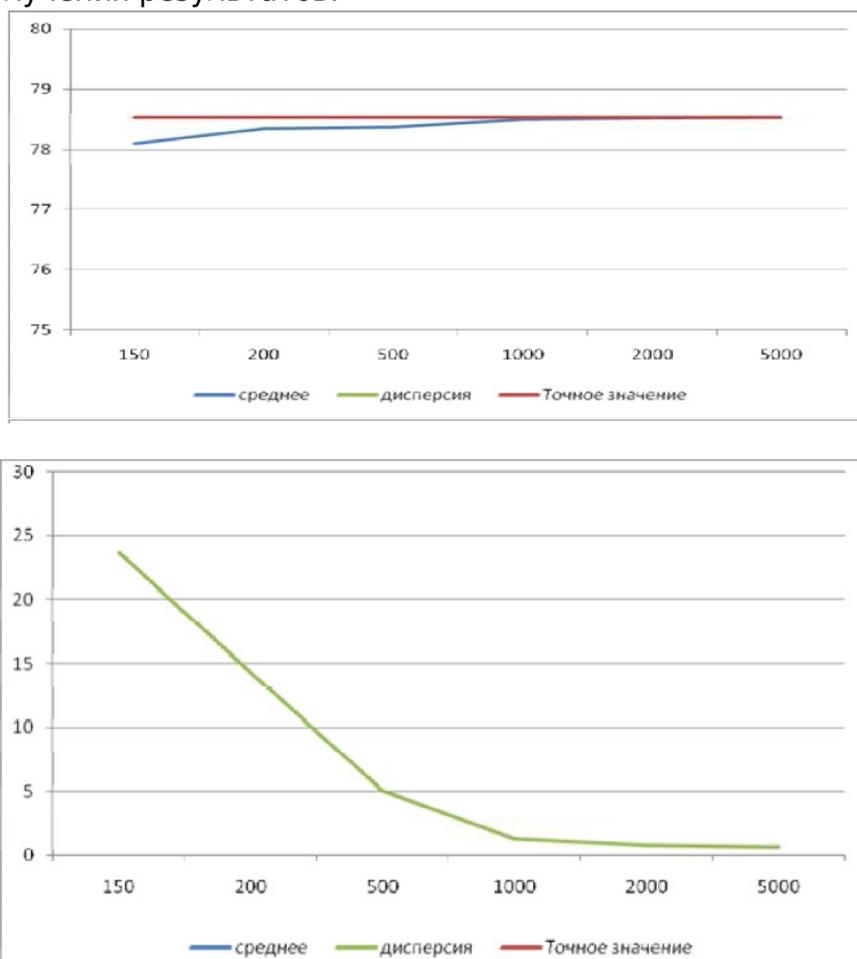


Рис.3.

3. Ввиду того что оценки площади имеют разброс, важно, чтобы результаты эксперимента, связанного с моделированием, были выражены в виде доверительных интервалов, показывающих величину отклонения от точного значений. В рассматриваемом примере, если A представляет собой точное значение площади, \bar{a} и s^2 — среднее и дисперсию N наблюдений, то $100(1-\alpha)\%$ -ный доверительный интервал для A задается как

$$\bar{A} - \left(\frac{s}{\sqrt{N}}\right) t_{\frac{\alpha}{2}; N-1} \leq A \leq \bar{A} + \left(\frac{s}{\sqrt{N}}\right) t_{\frac{\alpha}{2}; N-1}$$

Практическая часть.

Проверить решение Примера 1 с использованием разных пакетов.

Решение задания 2 также привести в разных пакетах - Excel, LibreOffice, Gnumeric, MathCad, SciLab (Matlab).

Решение задач 1 и 3 можно осуществить в любом пакете.

Результаты, полученные с помощью моделирования в задании 2 сравнить с расчетным результатом.

Для отчета необходимо:

1. Для каждого задания привести математическую модель эксперимента
2. Привести тексты модулей решения всех заданий.
3. Определить оптимальное количество экспериментов с помощью оценки дисперсии.
4. Произвести обработку результатов моделирования и представить ответ в виде доверительных интервалов для искомой величины.

Задание 1.

- 1) Решить задачу «случайных блужданий» в ее классической трактовке.
- 2) Дополнить модель, учитывая, что человек делает шаги вперед в 2 раза чаще, чем шаги назад.
- 3) Дополнить модель задачи, учитывая, что человек делает шаг не только по диагонали, но и строго вперед (назад), вправо (влево).

Задание 2 (по вариантам)

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \sin(x) + 2$$

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

$$y = 0$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = e^{0.4x}$$

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$y = 0$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 0,2x^2$$

$$y = \frac{1}{0,2x}$$

$$x = 0$$

$$y = 4$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \operatorname{tg}(x)$$

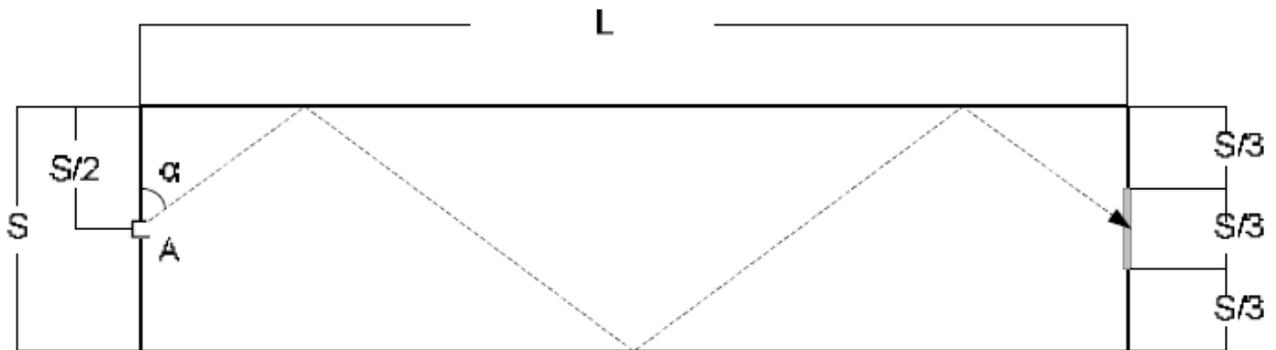
$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = 0$$

$$x = 3$$

Задание 3.

Из отверстия А трубки длиной L вылетают частицы под углом α (α – случайная величина, распределенная равномерно). Частицы могут сколь угодно много раз отталкиваться от стенок трубки. Составить математическую модель и провести эксперимент для определения доли частиц, попадающих в выделенную область. Для упрощения модели пренебречь диаметром отверстия А, диаметром частиц, затуханием колебаний частиц.



Варианты для задания 2

№ в журнале	Номер задания
1	1
2	2
3	3
4	4
5	1
6	2
7	3
8	4
9	1
10	2
11	3
12	4
13	1
14	2
15	3

16	4
----	---

Варианты систем для заданий 1 и 3

№ в журнале	Система для задания №1	Система для задания №3
1	Excel	SciLab
2	LibreOffice Calc	MathCAD
3	Gnumeric	SciLab
4	MathCAD	Gnumeric
5	SciLab	Excel
6	Excel	SciLab
7	LibreOffice Calc	MathCAD
8	Gnumeric	SciLab
9	MathCAD	Gnumeric
10	SciLab	Excel
11	Excel	SciLab
12	LibreOffice Calc	MathCAD
13	Gnumeric	SciLab
14	MathCAD	Gnumeric
15	SciLab	Excel
16	Gnumeric	MathCAD