Лекція 04.
Динамічні системи

На попередніх лекціях ми розглядали статичні моделі, тобто випадок, коли один експеримент не залежить від іншого. Можна сказати, що система не мала пам'ять. Тобто, у який би момент часу ми не вимірювали значення вихідної величини, при однаковому значенні вхідного сигналу результат був той самий. Якщо щораз значення на виході, при тому самому вхідному значенні, різне, тобто залежить від того, у якій послідовності подавалися вхідні значення, то ми маємо справу з *динамічною системою*.

Динамичні системи, на відміну від статичних, пам'ятають свій минулий стан, тобто мають пам'ять. Тому в записі моделі динамічних систем присутня похідна, що зв'язує минулий стан системи із сьогоденням. Чим більшою пам'яттю володіє система, тим більше станів з минулого впливають на сьогодення, тим більший ступінь старшої похідної використається в записі моделі. У даній лекції розглядаються динамічні системи.

Задача 1. На вході й виході чорного ящика (мал. 4.1) є залежності параметрів X й Y від часу t. Завдання полягає в тім, щоб адекватно визначити чорний ящик.

Рис. 4.1. Чорний ящик, що містить динамічну систему. Умовна позначка

Графіки залежностей $X(t)$ і $Y(t)$ можуть бути самими різними, наприклад, такими, як показано на мал. 4.2.

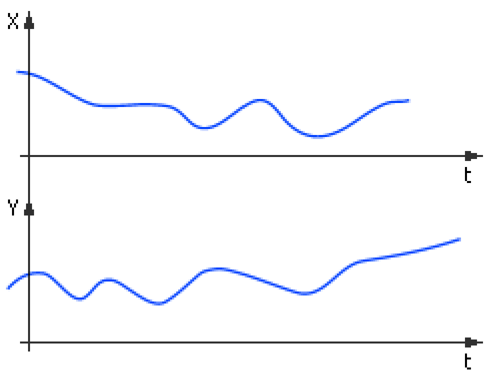

Рис. 4.2. Тимчасові залежності — вхідний і вихідний сигнали

Оскільки моделювання систем має на увазі чисельні розрахунки на комп'ютері, те аналоговий сигнал переводять у дискретний вид. Для цього з певною частотою вихідний сигнал дискретизують, як показано на мал. 4.3.

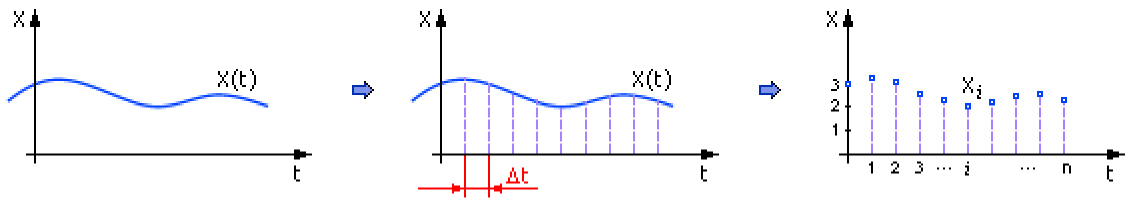

Рис. 4.3. Дискретизований часовий сигнал

За цим даними будують таблицю відрахунків (див. табл. 4.1, де $\Delta t = 0.1$).

Таблиця 4.1.
Табличне подання часового сигналу

i	0	1	2	3	…	i	…	n
t	0	0.1	0.2	0.3	…	$\Delta t \cdot i$	…	$\Delta t \cdot n$
$\boldsymbol{x_i}$	3	3.2	3.1	2.6	…	x_i	…	x_n

Сукупність значень змінної в таблиці, упорядкованих у часі, часто називають динамічним рядом. Природно, частина інформації при такій операції губиться. Чим менше відстань між отсчетами, чим більше частота дискретизації, тим менше втрати інформації. Частоту дискретизації приймають такий, щоб не втратити високочастотні складові в сигналі, окремі піки (див. також лекцію 8).

Будь-яка динамічна система характеризується рядом параметрів. Звичайно (найчастіше) параметрами називають коефіцієнти при похідних (першої, другої і т.д.) у записі моделі. Чим більший ступінь старшої похідної присутня в записі моделі, тим більший порядок динамічної системи, тим глибше її пам'ять, і тем більше коефіцієнтів (параметрів) треба визначити, щоб ідентифікувати систему.

Як визначити параметри динамічної системи? Спочатку потрібно оцінити порядок динамічної системи: він збігається зі ступенем найбільшої з похідних Y стосовно t. Допустимо, що на вхід системи, до цього був у нульових початкових умовах, подали одиничний сигнал $X(t)$, як показано на мал. 4.4.

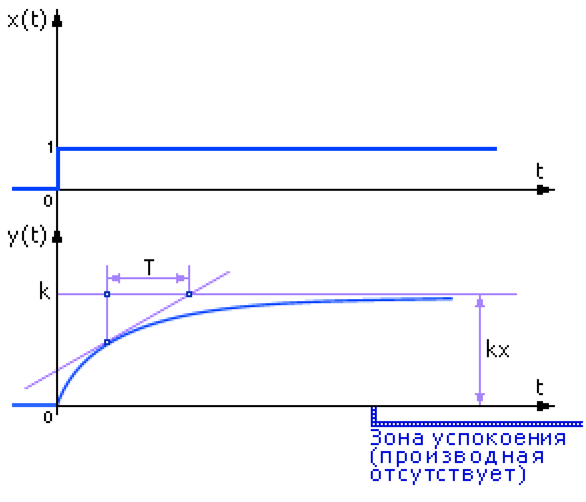

Рис. 4.4. Вхідний і вихідний сигнал, типовий
для системи першого порядку

Пояснимо зміст графіка. При нульових початкових умовах, якщо вхідний сигнал відсутній, вихідний сигнал дорівнює нулю, і говорять, що система перебуває в спокої. Якщо подати на вхід одиничний (пробний) сигнал й утримувати його на вході досить довго, то система на виході спробує підкоритися йому, почне відхилятися від нульового стану. Очікується, що система на виході повинна дійти до значення kx, тобто збільшити сигнал x в k раз (k — коефіцієнт підсилення вхідного сигналу). Але, як видно, відбувається це не відразу, а з деякою затримкою, сигнал на виході наростає поступово, інерційно. Наскільки інерційно реагує система, залежить від параметра T. Система досягне значення kx на виході й буде тримати цей сигнал, поки тримається на вході одиничний сигнал. Перехід від нуля до kx відбувається в часі. Перехід — процес динамічний, тобто в сигналі присутній зміна, що описується похідній, і вихід виявляється менше входу на деяку величину f:

$$y = kx - f(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t).$$

Коли система досягне на виході значення рівного kx, те змін не буде, значення похідної стане рівної нулю. $y = kx$.

$y = kx$ — окремий випадок інерційної ланки.

Якщо на виході буде спостерігатися експонентний сигнал, то система буде називатися системою першого порядку (або ланкою першого порядку). Для її опису досить одній похідній (а в рішенні моделі буде присутній один інтеграл):

$$T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = k\,x$$

У такої системи два параметри — T й k.

Помітимо, що один інтеграл у лінійних динамічних систем завжди «породжує» одну експоненту, подвійний інтеграл - суму двох експонент, і так далі.

Щоб визначити, чи є крива експонентою, у кожній її крапці проводиться дотична до перетинання з лінією сталого рівня (на мал. 4.4 це лінія $y(t) = k$); у випадку, якщо крива є експонентою, величина T у будь-якій крапці буде постійною.

Визначити T, використовуючи графік, можна ще так. Проведіть лінію, паралельну осі t на рівні $0.95k$. Із крапки, де ця лінія перетне експоненту, опустите перпендикуляр на вісь t. Відрізок від 0 до крапки перетинання перпендикуляра з віссю t буде дорівнює $3T$.

T характеризує інерційність системи (пам'ять). При малій величині T система слабко залежить від передісторії й вхід миттєво змушує змінитися вихід. При великому значенні T система повільно реагує на вхідний сигнал, а при дуже великому значенні T система видає незмінний вихідний сигнал, практично не реагуючи на вхідні впливи.

Коефіцієнт k характеризує здатність системи до посилення (при $k < 1$ — до ослаблення) рівня вхідного сигналу. Щоб визначити коефіцієнт k на графіку, досить дочекатися заспокоєння сигналу на виході системи й обчислити відношення рівня вихідного сигналу до рівня вхідного. Математично це означає, що всі що складають, утримуючі похідні, дорівнюють нулю (система заспокоїлася, руху немає), а доданок, що *залишився,* $Y = \cdot\, k$ X визначає *значення* k.

Ланка першого порядку

Ланка першого порядку володіє двома параметрами: інерційністю T і коефіцієнтом підсилення $k = Y(t = \infty)/X$.

Чим більше похідних ураховується в записі моделі, тим з ланкою більшого порядку ми маємо справу, тим більше коефіцієнтів при похідних варто визначити.

Уведемо поняття передатної функції як моделі динамічної системи. По визначенню передатна функція - це відношення виходу до входу:

$$W = Y/X.$$

Передатна функція ланки першого порядку має вигляд:

$$W = k/(Tp + 1),$$

де «p» — символ диференціювання, тотожно рівний «d/dt». Символ «p» також називається алгебразованим оператором диференціювання. Тоді, використовуючи визначення передатної функції, маємо:

$$Y/X = k/(Tp + 1).$$

Далі одержимо:

$$(Tp + 1) \cdot Y = k \cdot X$$

або

$$T \cdot \mathrm{d}/\mathrm{d}t + Y = k \cdot X$$

або

$$T \cdot \Delta Y/\Delta t + Y = k \cdot X.$$

У різницевому виді рівняння можна записати як

$$T \cdot (Y_{i+1} - Y_i) + Y_i \cdot \Delta t = k \cdot X_i \cdot \Delta t.$$

Або, виразивши сьогодення через минуле:

$$Y_{i+1} = A \cdot X_i + B \cdot Y_i.$$

Тут $A = k \cdot \Delta t/T$ й $B = 1 - \Delta t/T$ — вагарні коефіцієнти. A указує на вагу компонента X, що визначає вплив зовнішнього миру на систему, B указує на вагу компонента Y, що визначає пам'ять системи, вплив на її поводження історії.

Зокрема, якщо $B = 0$, то $Y_{i+1} = A \cdot X_i$, і ми маємо справу з безінерційною системою $Y = k \cdot X$, що миттєво реагує на вхідний сигнал й підвищуючий його в k раз.

Якщо коефіцієнт $B = 0.5$, тобто $1 - \Delta t/T = 0.5$ або $\Delta t/T = 0.5$, то одержуємо, що коефіцієнт

$A = k \cdot \Delta t/T = k \cdot 0.5$ й, отже, $Y_{i+1} = 0.5 \cdot k \cdot X_i + 0.5 \cdot Y_i$. При постійному (одиничному) вхідному сигналі X буде отриманий графік.

Експонента, зображена на графіку, при великому n (у межі $n = \infty$) прагне до значення вхідного (одиничного) сигналу X, помноженого на коефіцієнт підсилення k, що підтверджується розрахунком:

$$Y_{n+1} = 0.5 \cdot k \cdot X_n + 0.5 \cdot Y_n = 0.5 \cdot k \cdot X_n + 0.5 \cdot (0.5 \cdot k \cdot X_{n-1} + 0.5 \cdot Y_{n-1}) =$$
$$= \ldots = (0...5^1 + 0.52 + \ldots + 0...5^{n+1}) \cdot k \cdot X_0 + 0.5^{n+1} \cdot Y_0 = 1 \cdot k \cdot X_0.$$

Нагадаємо, що вираження $(0.51 + 0.52 + \ldots + 0...5^{n+1})$ є геометричною прогресією, сума якої при $n = \infty$ дорівнює 1. А варте при Y_0 вираження 0.5^{n+1} звертається в 0 при $n = \infty$.

Якщо ще підсилити вплив минулого ($B = 1$), то система почне інтегрувати саму себе (вихід поданий на вхід системи), додаючи увесь час вхідний сигнал, що відповідає експонентному необмеженому росту вихідного сигналу: $Y_{i+1} = A \cdot X_i + Y_i$. За змістом це відповідає позитивному зворотному зв'язку. При $B = -1$ маємо модель: $Y_{i+1} = A \cdot X_i - Y_i$, за змістом відповідного негативного зворотного зв'язку. При визначенні моделі потрібно знайти невідомі коефіцієнти k та T.

Ланка другого порядку (коливальна ланка)

Якщо на вхід ланки подати одиничну функцію Хевісайда від часу $1[t]$, при нульових початкових умовах системи, то реакція на виході буде називатися перехідною функцією (або перехідною характеристикою), що часто позначають як $h(t)$. Сигнал $1[t]$ — це, у деякому змісті, еталонний іспитовий сигнал. Існують й інші еталонні іспитові сигнали. Наприклад, нескінченний імпульс нульової довжини (дельта-функція Дірака), гармонійний сигнал, періодичні прямокутні імпульси.

Перетворимо по Лапласу це рівняння:

$$a_0 \cdot p^2 \cdot Y(p) + a_1 \cdot p \cdot Y(p) + a_2 \cdot Y(p) = b \cdot U(p)$$

або, інакше:

$$(a_0 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_2) \cdot Y(p) = b \cdot U(p).$$

Визначимо передатну функцію ланки:

Якщо записати рівняння без вхідного впливу (нульові вхідні впливи $U = 0$) і скоротити Y, тобто: $T^2p^2 + 2\xi Tp + 1 = 0$, те таке рівняння буде називатися характеристичним, оскільки характеризує винятково внутрішні властивості ланки. Зверніть увагу, що в записі ланки втримуються три параметри:

T — постійна часу (у секундах);

ξ - коефіцієнт загасання (безрозмірна величина);

k — передатний коефіцієнт.

Залежно від величини ξ ланки другого порядку класифікуються по видах:

- ? = 0 — консервативна ланка другого порядку;
- $0 < \xi < 1$ — коливальна ланка другого порядку;
- $\xi \geq 1$ — аперіодична ланка другого порядку.

Аперіодична ланка 2-го порядку ($\xi \geq 1$)

Характеристичне рівняння ланки наступне:

$$T^2p^2 + 2\xi Tp + 1 = 0.$$

Тобто в рішенні присутні загасаючі експоненти. Типове поводження ланки з такими параметрами показане на мал. 4.6.

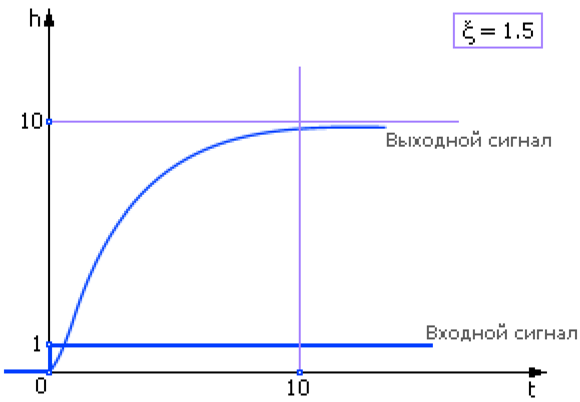

Рис. 4.6. Реакція аперіодичної ланки на одиничний вхідний сигнал

В окремому випадку, коли $\xi = 1$, обидва корені будуть однаковими, негативними:

Коливальна ланка 2-го порядку ($0 < \xi < 1$)

Характеристичне рівняння ланки наступне:

$$T^2p^2 + 2\xi Tp + 1 = 0.$$

Корінь різні, комплексно-сполучені, з негативною речовинною частиною, де $a = -\xi/T$, $b = \mathrm{sqrt}(1 - \xi^{2)}\ /T$.

Тому що корінь мнимі, то в поводженні ланки присутнє коливальна складова. Саме за цю особливість поводження ланка одержала назву коливального (див. мал. 4.7 і мал. 4.8).

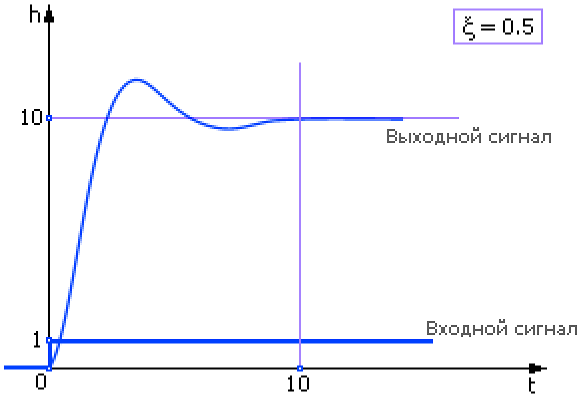

Рис. 4.7. Реакція коливальної ланки
на вхідний одиничний сигнал (ξ = 0.5)

Із графіків видно, що з ростом ξ колебательность ланки зменшується, зникаючи при $\xi \geq 1$

Перехідна функція ланки має вигляд:

$$h(t) = k\left[1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t + \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right] = k\left[1 - A\,e^{\alpha t}\sin(\omega_0 t + \varphi)\right]$$

де

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\quad \omega_0 = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

При малих ξ значення A наближається до 1, а значення φ — до 90°. По фізичному змісті ω_0 являє собою власну частоту коливань.

Консервативна ланка 2-го порядку ($\xi = 0$)

Характеристичне рівняння ланки наступне:

$$T^2p^2 + 1 = 0.$$

Корінь однакові, комплексно-сполучені, з нульовою речовинною частиною:

$$p_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{T} = \frac{-\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}}{T} = a \pm jb$$

Тому що корінь чисто мнимі, то поводженням ланки є незатухаючі коливання ($\xi = 0$), див. мал. 4.9.

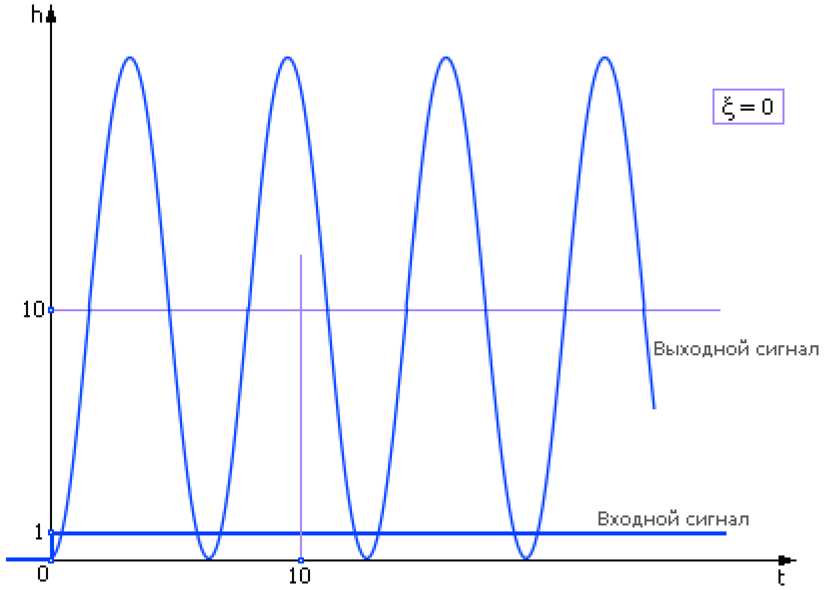

Рис. 4.9. Реакція коливальної ланки на вхідний одиничний сигнал (ξ = 0)

Перехідна функція ланки має вигляд: $h(t) = k \cdot (1 - \cos(t/T))$.

Із графіка експериментальним шляхом можна визначити єдиний параметр $T = T_0/(2 \cdot \pi)$.