Лекція 05.

Динамічні регресійні моделі, задані у вигляді передатної функції

Побудуємо **регресійну модель динамічної системи** на прикладі. Задамо модель у вигляді передатної функції (див. мал. 5.1).

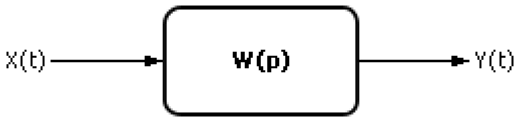

Рис. 5.1. Модель чорного ящика
у вигляді передатної функції

Зразковий вид динамічних сигналів на вході й на виході показаний на мал. 5.2. Обмежимося часом розгляду сигналів, рівним T.

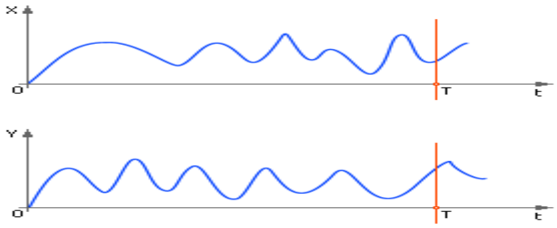

Рис. 5.2. Можливий вид залежності вхідного сигналу X від часу t і залежності вихідного сигналу Y від t для випадку з безперервним часом

Після дискретизації, пов'язаної з обробкою інформації на цифрових машинах, ці сигнали будуть виглядати так, як показано на мал. 5.3. Зверніть увагу на те, що окремі **отсчеты** відстоять друг від друга на відстані Δt. Важливо, що **отсчеты** стоять досить часто. Усього цих відліків — n, тобто $T = n \cdot \Delta t$.

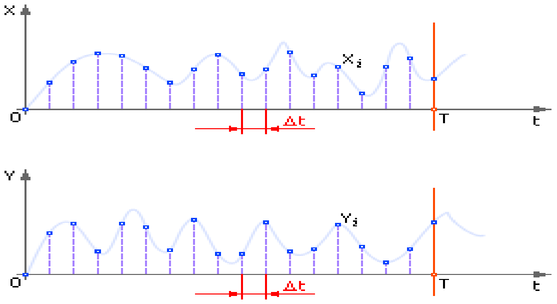

Рис. 5.3. Можливий вид залежності вхідного сигналу X від часу t
і залежності вихідного сигналу Y від t для випадку з дискретним часом

Допустимо, що залежності, представлені на мал. 5.2 і мал. 5.3, описуються передатною функцією наступного виду (помітимо, що, як й у лекції 02, **вид залежності висувається гіпотетично й гіпотеза повинна бути, зрештою, підтверджена або спростована**).

$$W = \frac{A_1 + A_2 p}{p^2 + A_3 p + A_4}$$

Заміняючи значок «p» на «d/dt» (обертаємо ваша увага, що таку заміну можна робити тільки для випадку нульових початкових умов: $X(0) = 0$ й $Y(0) = 0$) і з огляду на, що передатна функція — це, по визначенню, відношення виходу до входу, тобто $W = Y/X$, одержуємо диференціальне рівняння 2-го порядку.

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + A_3\frac{dY}{dt} + A_4 Y = A_1 X + A_2\frac{dX}{dt}$$

Двічі проінтегруємо це вираження й одержимо для деякого довільного моменту часу t.

$$Y(t) + A_3\int_0^t Y(t)dt + A_4\int_0^t\int_0^\tau Y(t)d\tau dt = A_1\int_0^t\int_0^\tau X(t)d\tau dt + A_2\int_0^t X(t)dt$$

Коефіцієнти A_1, A_2, A_3, A_4 потрібно визначити. Для цього виразимо рівняння в різницевому виді через суми, де n — число експериментальних крапок. Помітимо, що ми замінили інтеграли й безперервний перебіг часу — на суми й дискретне подання часу. Щоб обчислити суми й подвійні суми експериментально заданих залежностей x й y, скористаємося для зручності табл. 5.1 (щоб зайво не захаращувати таблицю, ми не стали дописувати в сумах Δt_i й $\Delta \tau_j$).

Таблиця 5.1.

Таблиця вихідних даних і допоміжних розрахунків

i	X_i	Y_i				
1	X_1	Y_1	X_1	Y_1	X_1	Y_1
2	X_2	Y_2	$X_1 + X_2$	$Y_1 + Y_2$	$2X_1 + X_2$	$2Y_1 + Y_2$
3	X_3	Y_3	$X_1 + X_2 + X_3$	$Y_1 + Y_2 + Y_3$	$3X_1 + 2X_2 + X_3$	$3Y_1 + 2Y_2 + Y_3$
…	…	…	…	…	…	…
m	X_m	Y_m	$X_1 + X_2 + \ldots + X_m$	$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m$	$m_1 + \ldots + X_m$	$m_1 + \ldots + Y_m$
…	…	…	…	…	…	…

n	X_n	Y_n	$X_1 + X_2 + \ldots + X_n$	$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$	$n_1 + \ldots + X_n$	$n_1 + \ldots + Y_n$

Помилку в деякій *m-ій* точці можна записати .

$$E_m = Y_m + A_3 \sum_{i=1}^{m} Y_i \Delta t_i + A_4 \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{j} Y_i \Delta t_i \Delta \tau_j - A_1 \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{j} X_i \Delta t_i \Delta \tau_j - A_2 \sum_{i=1}^{m} X_i \Delta t_i$$

Як і раніше, помилка показує, наскільки відходить теоретичне значення Y_m від експериментального значення.

Величина помилки залежить від значень параметрів A_1, A_2, A_3, A_4.

Тому F є функцією від чотирьох змінних: $F(A_1, A_2, A_3, A_4)$. Щоб знайти мінімум функції F, що доставляє за рахунок параметрів A_1, A_2, A_3, A_4, треба взяти частки похідні F по кожному з параметрів і дорівняти кожну похідну до нуля. У результаті одержуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial A_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial A_2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial A_3} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial A_4} = 0 \end{cases}$$

Отримано чотири рівняння із чотирма невідомими A_1, A_2, A_3, A_4.

З рішення системи рівнянь обчислюємо невідомі коефіцієнти й доповнюємо ними модель, де коефіцієнти вже визначені як числа:

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + A_3 \frac{dY}{dt} + A_4 Y = A_1 X + A_2 \frac{dX}{dt}$$

Задача визначення коефіцієнтів моделі вирішена. Зрозуміло, як і раніше, необхідно зрівняти одержуване із цієї моделі рішення Y теоретичне з Y, заданим експериментально, і обчислити помилку F. Далі перевірити її значення за критерієм - чи припустиме значення обчисленої помилки, або гіпотезу про вид моделі потрібно перемінити на більше точну.

Уважаючи що коефіцієнти моделі тепер нам відомі, побудуємо для заданого приклада реалізацію, що імітує поводження системи, описаною передатною функцією. Для цього скористаємося вже один раз отриманою формулою:

$$Y_m + A_3 \sum_{i=1}^{m} Y_i \Delta t_i + A_4 \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{j} Y_i \Delta t_i \Delta \tau_j = A_1 \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{j} X_i \Delta t_i \Delta \tau_j + A_2 \sum_{i=1}^{m} X_i \Delta t_i,\ m = 1, \ldots, n$$

або

$$Y_m = \underbrace{A_1 \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{j} X_i \Delta t_i \Delta \tau_j}_{W} + \underbrace{A_2 \sum_{i=1}^{m} X_i \Delta t_i}_{V} - \underbrace{A_3 \sum_{i=1}^{m} Y_i \Delta t_i}_{M} - \underbrace{A_4 \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{j} Y_i \Delta t_i \Delta \tau_j}_{H},\ m = 1, \ldots, n$$

Реалізація моделі представлена на мал. 5.4.

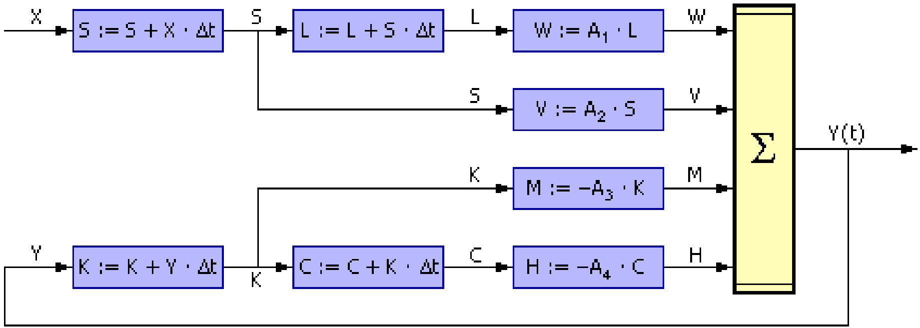

Рис. 5.4. Технічна реалізація передатної ланки після визначення коефіцієнтів регресійної моделі

При переході від інтеграла до чисельного підсумовування ми скористалися методом прямокутників. Розбивши площу під кривій y на ряд прямокутників однакової ширини Δt (див. мал. 5.5), одержуємо, що площа i-*го* прямокутника дорівнює $y_i \cdot \Delta t$, а S — сума площ всіх n прямокутників — буде *приблизно* дорівнює площі під кривій (інтегралу від функції y). Очевидно, що наближення тим точніше, чим менше значення Δt.

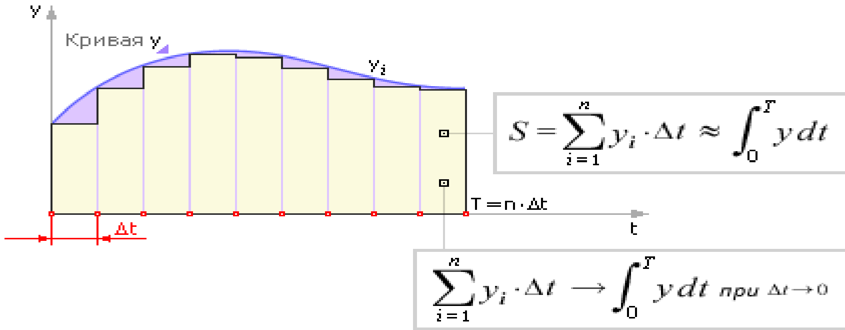

Рис. 5.5. Застосування методу прямокутників
для чисельного обчислення інтегралів