Лекція 06.

Модель у вигляді фільтра Калмана

Калманом була доведена теорема про те, що будь-який динамічний сигнал може бути представлений у вигляді:

$$Y_i = A_1 \cdot X_i + A_2 \cdot X_{i-1} + \ldots + B_1 \cdot Y_{i-1} + B_2 \cdot Y_{i-2} + \ldots + C\ldots$$

Рис. 6.1. Графічне подання фільтра Калмана на схемах

Ідея фільтра Калмана полягає в тім, що вихід системи в *i-ий* момент часу визначається вхідним сигналом, його передісторією й передісторією самого стану системи.

Чим більше є членів ряду, тобто чим більше змінних Y ураховується в записі моделі, тим глибше пам'ять системи. Помітимо, що наявність члена Y_{i-1} у моделі динамічної системи відповідає наявності першій похідній, Y_{i-2} — другій похідній і т.д.

Допустимо, відомі наступні експериментальні дані: стану сигналів X_i й Y_i в n тимчасових крапках (табл. 6.1).

Таблиця 6.1.
Таблиця експериментальних даних

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{X_i}$	$\boldsymbol{Y_i}$
1	X_1	Y_1
2	X_2	Y_2
…	…	…
$n-1$	X_{n-1}	Y_{n-1}
n	X_n	Y_n

Оскільки для кожної експериментальної крапки X_i треба вказати її сусідів, заданих поруч, те зручно відліки представити в розширеній таблиці, використовуваної для розрахунку (див. табл. 6.2).

Таблиця 6.2.

Таблиця експериментальних даних і проміжних розрахунків

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{X_i}$	$\boldsymbol{X_{i-1}}$	…	$\boldsymbol{Y_i}$	$\boldsymbol{Y_{i-1}}$	$\boldsymbol{Y_{i-2}}$
m	X_m	X_{m-1}	…	Y_m	Y_{m-1}	Y_{m-2}
$m+1$	X_{m+1}	X_m	…	Y_{m+1}	Y_m	Y_{m-1}
$m+2$	X_{m+2}	X_{m+1}	…	Y_{m+2}	Y_{m+1}	Y_m
…	…	…	…	…	…	…

Знаходимо помилку між значенням експериментально знятої крапки й теоретичним її значенням (гіпотезою):

$$E_m = Y_m - A_1 \cdot X_m - A_2 \cdot X_{m-1} - \ldots - B_1 \cdot Y_{m-1} - B_2 \cdot Y_{m-2} - \ldots - C...$$

Сумарна помилка F (сума береться по всіх експериментальних крапках) повинна бути мінімізована щодо обумовлених змінних $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C$:

$$F = \sum_{i=1}^{m} E_i^2 \Rightarrow \min_{A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C}$$

Після узяття часток похідних від F по $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C$, прирівнювання їх до нуля й складання системи рівнянь виходить лінійна множинна регресійна модель, з якої визначаються невідомі коефіцієнти $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C$ моделі.

Оскільки коефіцієнти моделі визначені, побудуємо реалізацію (див. мал. 6.2), що імітує поводження системи, описаної фільтром Калмана.

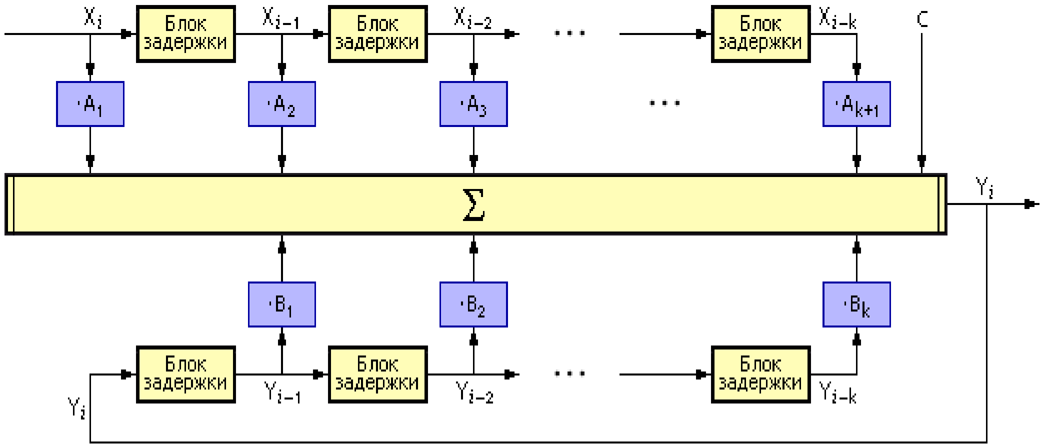

Рис. 6.2. Варіант технічної реалізації фільтра Калмана

«Блок затримки» у представленій реалізації необхідний для того, щоб зрушити сигнал на такт й одержати сусідній відлік для наступної змінної ряду моделі. Залежно від середовища реалізації блок затримки можна організувати різними способами.

Наприклад, у випадку реалізації блоку затримки в середовищі моделювання Stratum-2000, перший спосіб може бути заснований на перезаписі інформації з одного змінної (осередку) в іншу, на що потрібно один такт. Таким чином, можна організувати затримку сигналу на будь-яке число тактів. Наприклад, затримка сигналу X відносно Y буде становити 3 такти, якщо виконати наступну послідовність операцій: A1 := X; A2 := A1; Y := A2.

У другому способі затримка організується за допомогою масиву: на кожному такті потрібно, щоб цифри були переміщені в сусідні осередки.

На мал. 6.3 наведена схема настроювання (автоматичного знаходження коефіцієнтів).

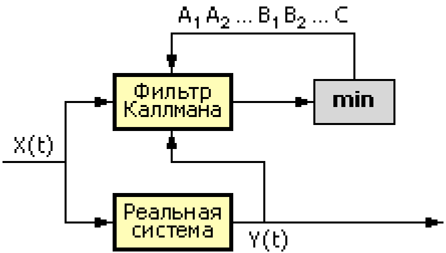

Рис. 6.3. Схема автоматичного настроювання коефіцієнтів моделі «на ходу»

На мал. 6.4 наведена схема перевірки фільтра Калмана.

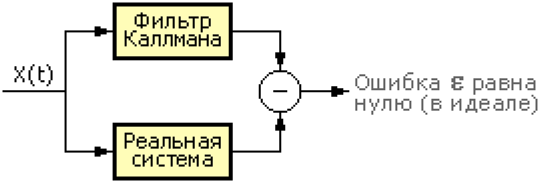

Рис. 6.4. Схема перевірки роботи моделі фільтра Калмана