Лекція 07.

Модель динамічної системи у вигляді Фур'є подання (модель сигналу)

Цей спосіб моделювання динамічних систем ґрунтується на тім, що в будь-якому сигналі присутні гармонійні складові. Залежно від частоти, складові називаються гармоніками (перша, друга й так далі). Сума гармонік з відповідними вагами становить модель сигналу.

Нехай, наприклад, у деякому сигналі присутній сума трьох гармонік: $3 \cdot \cos(t) + 2 \cdot \cos(3t) + 0.5 \cdot \cos(5t)$. Це значить, що в сигналі присутній перша гармоніка з амплітудою 3, третя гармоніка з амплітудою 2, п'ята гармоніка з амплітудою 0.5. Сам сумарний сигнал виглядає так, як показано на мал. 7.1.

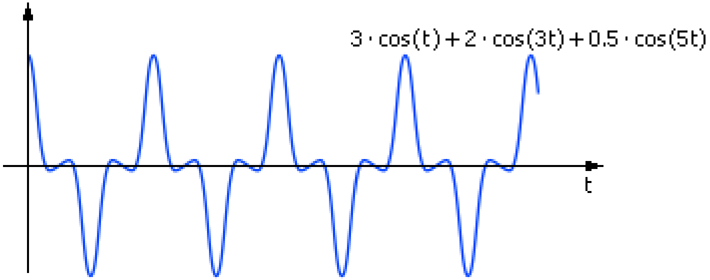

Рис. 7.1. Приклад гармонійного сигналу

Спектр цього сигналу показаний на мал. 7.2. Ясно, що в нашому прикладі більша вага (амплітуду) у сигналі має (більше інших представлена) перша гармоніка, найменша вага має п'ята гармоніка.

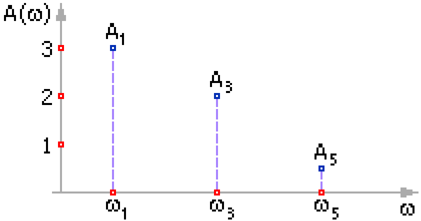

Рис. 7.2. Приклад спектра гармонійного сигналу

Любою сигнал, як складний би він не був, може бути представлений сумою гармонік. Більше простий сигнал представляється меншим числом гармонік, більше складний - більшим. Швидко мінливий сигнал, що містить різкі піки, має у своєму складі гармоніки високих порядків. Чим більше гармонік представлено в моделі сигналу, тим точніше, у загальному випадку, модель відбиває реальний сигнал.

Нехай заданий якийсь сигнал $X(t)$ (мал. 7.3).

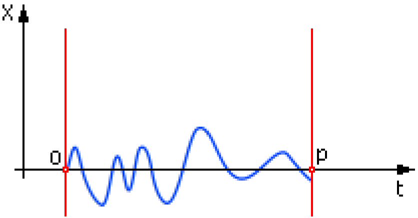

Рис. 7.3. Часовий сигнал на вході перетворення Фур'є (можливий вигляд)

Визначимося згодом розгляду сигналу: якщо сигнал *періодичний*, то час розгляду дорівнює періоду *p* сигналу; якщо сигнал *неперіодичний*, то періодом сигналу вважається увесь час його розгляду.

$A_0 = \frac{2}{p}\int_0^p X(t)\,\mathrm{d}t$	
$A_1 = \frac{2}{p}\int_0^p X(t)\cos\left(\frac{2\,\pi\,t}{p}\right)\mathrm{d}t$	$B_1 = \frac{2}{p}\int_0^p X(t)\sin\left(\frac{2\,\pi\,t}{p}\right)\mathrm{d}t$
$A_2 = \frac{2}{p}\int_0^p X(t)\cos\left(\frac{2\,\pi\,2\,t}{p}\right)\mathrm{d}t$	$B_2 = \frac{2}{p}\int_0^p X(t)\sin\left(\frac{2\,\pi\,2\,t}{p}\right)\mathrm{d}t$
...	...
$A_i = \frac{2}{p}\int_0^p X(t)\cos\left(\frac{2\,\pi\,i\,t}{p}\right)\mathrm{d}t$	$B_i = \frac{2}{p}\int_0^p X(t)\sin\left(\frac{2\,\pi\,i\,t}{p}\right)\mathrm{d}t$
...	...

A_i й B_i — це ваги відповідних гармонік, що є присутнім у сигналі; i — номер гармоніки. Формули їхнього розрахунку називаються прямим перетворенням Фур'є.

Значення $2\pi \cdot i/p = \omega_i$ — це частота *i-ої* гармоніки. Відзначимо також, що частота *i-ої* гармоніки пов'язана із частотою першої гармоніки простим співвідношенням: $\omega_i = i \cdot \omega_1$.

Відзначимо важливу особливість даного способу подання: замість усього сигналу у всіх його подробицях досить зберігати вектор чисел, що представляють вагові коефіцієнти складових його гармонік: $(A_0, A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots)$... Тобто ці числа повністю характеризують вихідний сигнал, тому що по них сигнал можна повністю відновити формулою зворотного перетворення Фур'є:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right) + B_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{p}\right) + A_2 \cos\left(\frac{2\pi 2 t}{p}\right) + B_2 \sin\left(\frac{2\pi 2 t}{p}\right) + \ldots$$

$$+ A_i \cos\left(\frac{2\pi i t}{p}\right) + B_i \sin\left(\frac{2\pi i t}{p}\right) + \ldots$$

Саме ці числа використаються також при обробці сигналу в моделі динамічної системи. Зображення цих чисел на графіку залежно від номера гармоніки (частоти) називається спектром сигналу (мал. 7.4). Спектр показує, наскільки є присутнім у сигналі відповідна складова. Спектр — це частотна характеристика сигналу.

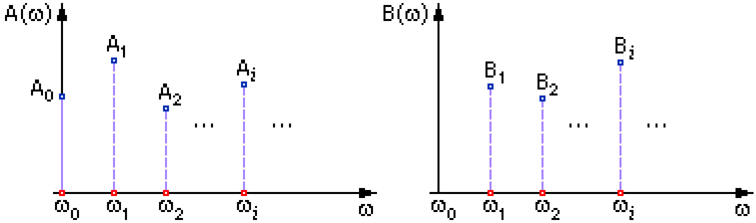

Рис. 7.4. Сигнал, представлений у частотній області на виході перетворення Фур'є, спектр сигналу (можливий вид)

Тут сигнал представлений у частотній області. Завжди по формулах прямого перетворення Фур'є можна перейти з тимчасової області в частотну, а по формулах зворотного перетворення Фур'є перейти із частотної області в тимчасову. У якій області (частотн або тимчасовий) працювати із сигналом в окремий момент, вирішують із міркувань зручності, наочності й економії обчислень. Помітимо, що ємні з погляду обчислень операції інтегрування й диференціювання сигналу в тимчасовій області заміняються на операції алгебраїчного додавання й множення в частотній області, що з обчислювальної точки зору реалізується набагато точніше й швидше.

Система чисел A_i й B_i є повною характеристикою сигналу. Такою же повною характеристикою сигналу є система чисел S й φ, які також утворять спектр (мал. 7.5). S — це амплітудно-частотна характеристика (АЧХ), φ - фазо-частотна характеристика (ФЧХ).

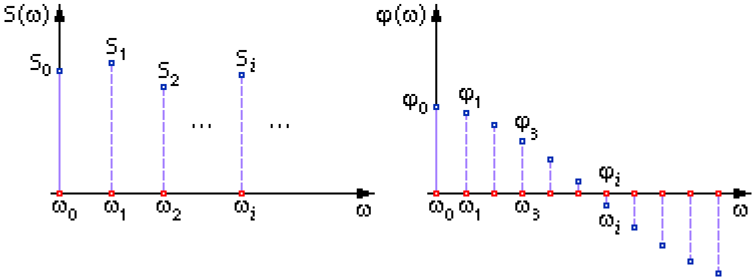

Рис. 7.5. Сигнал, представлений у частотній області, амплітудно-частотна й фазо-частотна характеристика сигналу (можливий вид)

Системи «*A* й *B*» й «*S* й φ» є повністю рівнозначними. Перехід із системи «*A* й *B*» у систему «*S* й φ» виробляється по наступних формулах: $S_i = \mathrm{sqrt}(A_i^2 + B_i^2)$ — абсолютна амплітуда сигналу; $\varphi_i = \mathrm{arctg}(B_i/A_i)$ — фаза сигналу, при додаванні гармонік потрібно враховувати зрушення фаз (зрушення фаз проілюстроване на мал. 7.8).

У випадку із системою «S й φ» зворотне перетворення Фур'є має вигляд:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} S_i \cdot \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

Рис. 7.6 і мал. 7.7 роз'ясняють зміст коефіцієнтів A й B різних гармонік. Ці коефіцієнти — амплітуди синусів і косинусів відповідних частот (гармонік). У тимчасовій області графічно вони відповідають розмаху гармонійних коливань (мал. 7.6 і мал. 7.7); у частотної — висоті спектральної смужки на відповідній частоті (мал. 7.4).

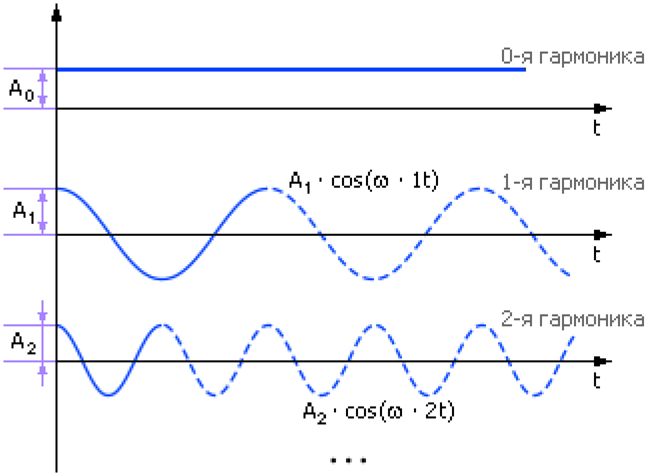

Рис. 7.6. Геометрична ілюстрація параметрів А и ω для косинусної складового гармонійного сигналу

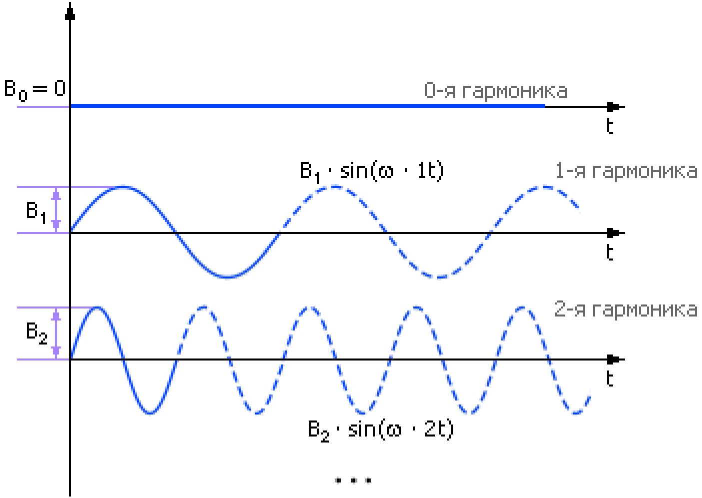

Рис. 7.7. Геометрична ілюстрація параметрів У и ω
для синусної складової гармонійного сигналу

Зміст чисел S_i й φ_i роз'яснений на мал. 7.8.

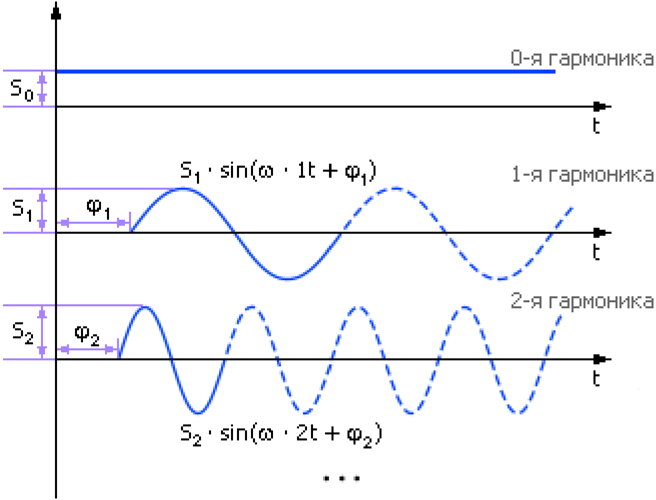

Рис. 7.8. Геометрична ілюстрація S й φ для складової гармонійного сигналу