Лекція 08.

# Модель динамічної системи у вигляді Фур'є подання (модель об'єкта)

Нехай є вхідний динамічний сигнал $X(t)$ і об'єкт F, що перетворить цей сигнал у вихідний $Y(t)$ (див. мал. 8.1). Якщо об'єкт описується диференціальними рівняннями, то таким перетворенням є інтегрування вхідного сигналу й обчислення $Y(t)$. Інтегрування, як було раніше показане, - операція, що вимагає значних обчислювальних ресурсів і має значну погрішність при реалізації на цифрових машинах.

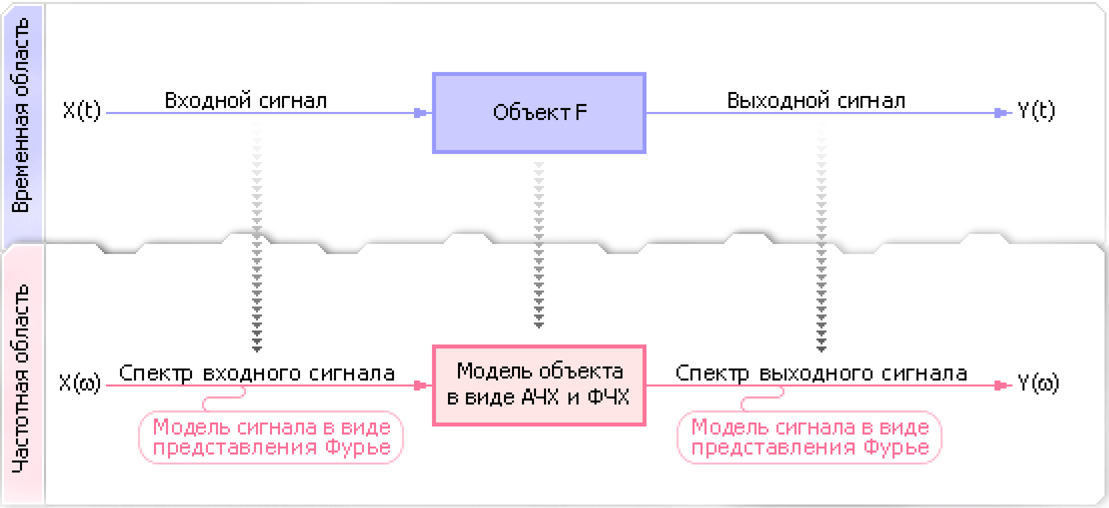


Рис. 8.1. Схема моделювання динамічного об'єкта
при переході з тимчасової області подання в частотну

Якщо перейти від опису вхідного сигналу в тимчасовій області до опису в частотній області (див. мал. 8.1), а від диференціальних рівнянь перейти до частотної характеристики об'єкта, — тобто, фактично, замінити сигнал на частотну модель сигналу, а об'єкт на частотну модель об'єкта, — те з обчислювальної точки зору процес перетворення сигналу спроститься. Звичайно, отриманий результат теж буде частотною моделлю вихідного сигналу, що для одержання остаточної відповіді придеться зконвертувати у тимчасову область $Y(t)$. Процес такої конвертації із частотної області в тимчасову й обернено називається перетворенням Фур'є (є й інші перетворення). Для тих об'єктів, для яких відома їхня модель у частотній області, такий підхід досить просто реалізується на комп'ютері й дозволяє досягти кожний наперед заданій точності.

Модель об'єкта в частотному виді називається передатною функцією або АЧХ (амплітудно-частотною характеристикою). Об'єкти, для яких відомі АЧХ, звичайно називають типовими ланками (підсилювальна ланка, аперіодичне, коливальне й т.д.). Нехай, для приклада, характеристика об'єкта в частотній області наступна (див. мал. 8.2).

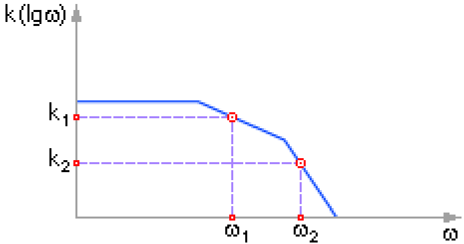


Рис. 8.2. АЧХ (можливий вид)

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) показує, наскільки пропускається об'єктом на вихід відповідна гармоніка. Значення $k_i$ характеризує коефіцієнт усилення гармонійного сигналу на певній частоті $\omega_i$.

Моделювання проходження сигналу через об'єкт у цьому виді полягає в множенні коефіцієнта $A_i$ гармоніки із частотою $\omega_i$ вхідного сигналу $X(t)$ на коефіцієнт підсилення $k_i$ при тій же гармоніці із частотою $\omega_i$ в АЧХ: $A_i^* = A_i(\omega_i) \cdot k_i(\omega_i)$. (Для коефіцієнта $B$ перетворення аналогічно.) У результаті виходить коефіцієнт $A_i^*$ вихідної гармоніки даної частоти $\omega_i$. Процедура виконується для всіх частот, представлених у вхідному сигналі й АЧХ. Після одержання спектра вихідного сигналу можна відновити сигнал як тимчасову залежність за допомогою формули зворотного перетворення Фур'є.

**Помітимо головне**: моделювання проходження сигналу через динамічний об'єкт звелося до операції множення двох змінних, точніше, до операції поелементного множення вектора одних змінних на вектор інших змінних.

Схема перетворення показана на мал. 8.3.

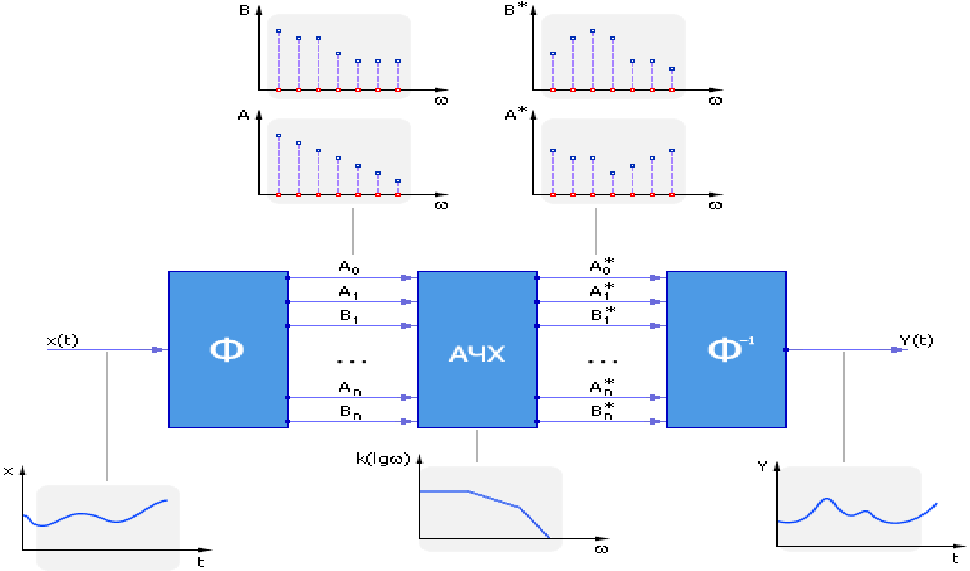


Рис. 8.3. Схема процедури перетворення сигналу при використанні методу Фур'є

Якби часовий сигнал проходив через ланку, що у тимчасовій області представлено диференціальним рівнянням, то довелося б його інтегрувати, що, звичайно, приводить до погрішностей результату. У частотній області досить перемножити значення коефіцієнтів ряду Фур'є сигналу й ланки при однакових частотах. Очевидно, що достоїнством методу є заміна диференціальних рівнянь моделі на алгебраїчні. **Зрозуміло, даний підхід може бути використаний тільки для об'єктів, у яких відомий вид передатної функції**. (До речі, для невідомих випадків АЧХ може бути отримана **чисельним розкладанням у ряд**.)

В процесі моделювання набору об'єктів для перетворення сигналу (наприклад, протяжних трактів радіоелектронних пристроїв) іноді доводиться застосовувати пряме й зворотне перетворення Фур'є неодноразово. На практиці послідовні блоки часто називають каскадами.

Нехай ми маємо радіо-електронний пристрій (РЭУ), що складається з 5 блоків (див. мал. 8.4). Блоки 1, 2, 4, 5 — лінійні й представлені відповідними відомими АЧХ; блок 3 — нелінійний, тому АЧХ для нього невідома. Прикладом лінійного блоку може служити аперіодична ланка, коливальна ланка й т.д. (див. лекцію 05). Прикладом нелінійного блоку може служити пристрій обмеження сигналу (зріз) по амплітуді.

Як видно з мал. 8.4, спочатку вхідний сигнал $X(t)$ прямим перетворенням Фур'є переводиться в частотну область і проходить у вигляді спектра через АЧХ 1 й 2 *лінійні* блоки, потім зворотним перетворенням Фур'є сигнал після 2 блоки переводиться в тимчасову область. Проходимо *нелінійний* блок 3 у тимчасовому поданні. Результат роботи блоку 3 знову перетворимо прямим перетворенням Фур'є в частотну область і проходимо через АЧХ блоків 4 й 5. Наприкінці отриманий спектр перетвориться за допомогою зворотного перетворення Фур'є в тимчасову область, — вид сигналу, $Z(t)$, є результатом моделювання.

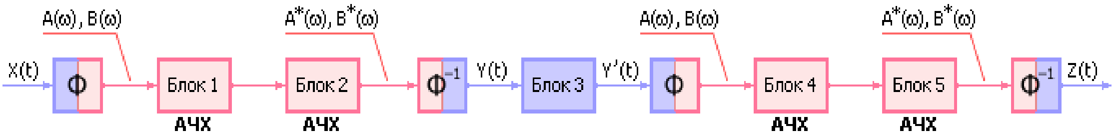


Рис. 8.4. Приклад моделювання тракту, що містить нелінійні блоки, з використанням методу Фур'є

Метод, що ми розглянули, є одним із самих швидкодіючих. Це пов'язане із заміною операцій інтегрування й диференціювання, що зустрічаються в моделях динамічних ланок, на операції додавання й множення при переході в частотну область. Така процедура забезпечує точність і швидкодію моделі.

Для методу важливо, **з якою частотою ви дискретизуєте сигнал** при розкладанні в ряд Фур'є. Якщо частота дискретизації мала, тобто відліки в сигналі випливають рідко, з більшими інтервалами, то частина сигналу залишається загубленої, тому що між відліками може виявитися різко зрослий й опалий пік, інформація про яке пропаде. Тобто говорять, що мала частота дискретизації зрізує високі частоти в сигналі. (Пік - це і є високочастотна складова, що може бути загублена).

**По теоремі Котельникова**, щоб не втратити відповідну гармоніку, потрібно дискретизировать сигнал із частотою не менш чим в 2 рази більшої, ніж найвища частота із представлених в аналоговому сигналі:

$$2W_{\max} \le W_{\text{дискр.}},$$

де $W_{\text{дискр.}} = 1/\Delta t_{\text{дискр.}}$ — частота дискретизації, $W_{\max}$ — максимальна частота, що є присутнім у сигналі.