Лекція 10.

Чисельні методи при моделюванні динамічних систем. Метод Ейлера

Нехай нам відома вхідна динамічна послідовність X (вхідний сигнал) і модель (спосіб перетворення вхідного сигналу у вихідний сигнал). Розглядається задача визначення вихідного сигналу $y(t)$ (див. мал. 10.1).

Рис. 10.1. Структурна модель динамічної системи
з одним входом й одним виходом

Модель динамічної системи може бути представлена диференціальним рівнянням. Основне рівняння динаміки:

$$y' = f(x(t), y(t), t).$$

Відомі початкові умови в нульовий момент часу t_0: $y(t_0)$, $x(t_0)$. Щоб визначити вихідний сигнал, помітимо, що по визначенню похідної:

$$y' \cong \mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Нам відоме положення системи в крапці «1», потрібно визначити положення системи в крапці «2». Крапки відділені друг від друга відстанню Δt (мал. 10.2). Тобто розрахунок поводження системи виробляється по кроках. Із крапки «1» ми стрибком (дискретно) переходимо в крапку «2», відстань між крапками по осі t називається кроком розрахунку Δt.

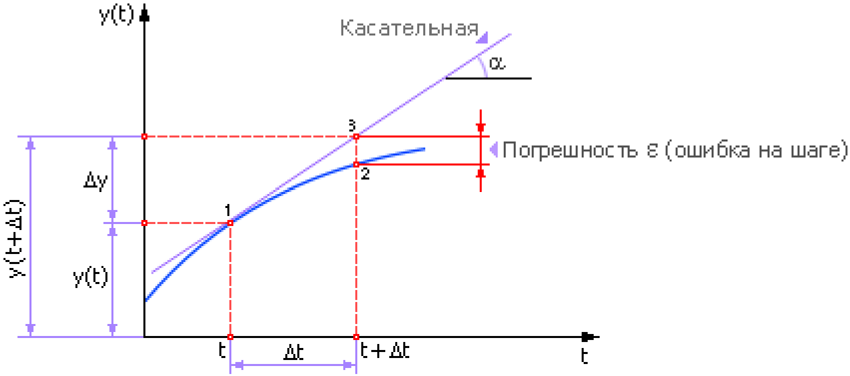

Рис. 10.2. Ілюстрація розрахунку майбутнього стану системи методом Ейлера на одному кроці

Тоді:

$$y(t+\Delta t) \approx y(t) + \Delta y = y(t) + \mathrm{tg}(\alpha) \cdot \Delta t = y(t) + \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \Delta t = y(t) + f(x,\ y,\ t) \cdot \Delta t$$

або

Состояние системы
в настоящем

$$y(t+\Delta t) \approx y(t) + \underbrace{\underbrace{f(x,\ y,\ t)}_{\text{Скорость, тенденция}}\ \underbrace{\Delta t}_{\text{Шаг}}}_{\text{Приращение, изменение}}$$

Состояние системы
в будущем

Остання формула називається формулою Ейлера.

Очевидно, щоб довідатися стан системи в майбутньому $y(t + \Delta t)$, треба до дійсного стану системи $y(t)$ додати зміна Δy, що пройшло за час Δt.

майбутнє = сьогодення + зміна

майбутнє = сьогодення + швидкість · крок

Розглянемо ще раз це важливе співвідношення, вивівши його з геометричних міркувань (мал. 10.3).

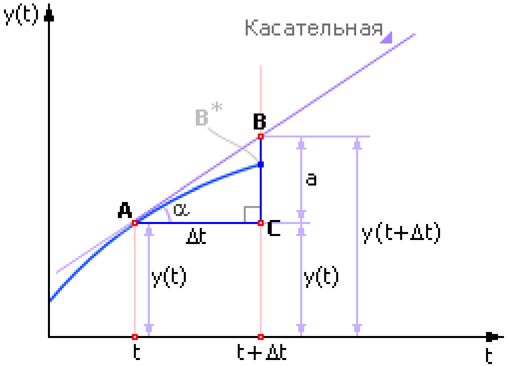

Рис. 10.3. Геометрична ілюстрація методу Ейлера

Нехай А - крапка, у якій стан системи відомо. Це «сьогодення» стан системи.

У крапці А до траєкторії руху системи проведемо дотичну. Дотична — це похідна функції $f(x(t), y(t), t)$ по змінної t. Похідну в крапці завжди легко обчислити, досить підставити відомі змінні (у момент «Сьогодення» вони відомі) у формулу $y' = f(x(t), y(t), t)$.

Помітимо, що, по визначенню, похідна пов'язана з кутом нахилу дотичній: $y' = \mathrm{tg}(\alpha)$, виходить, кут α легко обчислити ($\alpha = \mathrm{arctg}(y')$) і провести дотичну.

Проведемо дотичну до перетинання з лінією $t + \Delta t$. Момент $t + \Delta t$ відповідає «майбутньому» стану системи. Проведемо лінію паралельно осі t від крапки А до перетинання з лінією $t + \Delta t$. Лінії утворять прямокутний трикутник АВС, один катет якого дорівнює Δt (відомий). Відомий також кут α. Тоді другий катет у прямокутному трикутнику АВС дорівнює: $a = \Delta t \cdot \mathrm{tg}(\alpha)$. Тепер легко обчислити ординату крапки В. Вона складається із двох відрізків — $y(t)$ і a. Ордината символізує положення системи в крапці $y(t + \Delta t)$. Тобто $y(t + \Delta t) = y(t) + a$ або далі $y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot \mathrm{tg}(\alpha)$ або, підставляючи далі, маємо: $y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot y'$ й, нарешті, $y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot f(x(t), y(t), t)$. Снову ми одержали формулу Ейлера (з геометричних міркувань).

Эта формула може дати точні результати тільки при дуже малих Δt (говорять при $\Delta t \to 0$). При $\Delta t \neq 0$ формула дає розбіжність між щирим значенням y і розрахунковим, рівне ε, тому в ній повинен стояти знак наближеної рівності, або вона повинна бути записана так:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot f(x(t), y(t), t) + \varepsilon.$$

І справді. Гляньте ще раз на мал. 10.3. Будемо подумки зрушувати лінію $t + \Delta t$ уліво (фактично, будемо наближати значення Δt до нуля). Як неважко бачити, відстань $BB^* = \varepsilon$, — тобто помилка! — буде скорочуватися. У межі (при Δt –> 0) значення помилки ε буде дорівнює нулю.

Ітак, заміняючи реальну криву прямій (дотичній) на відрізку Δt, ми вносимо в рішення помилку, потрапляючи в результаті не в крапку «2» (див. мал. 10.2), а поруч, у крапку «3». Очевидно, що цей чисельний метод на кожному кроці має погрішність розрахунку ε.

З малюнка видно, що чим менше взяти величину Δt, тим менше буде помилка розрахунку ε. Тобто для розрахунку поводження системи на скільки-небудь тривалому відрізку часу (наприклад, від t_0 до t_k), щоб зменшити помилку на кожному кроці, кроки Δt роблять по можливості малими. Для досягнення крапки t_k відрізок $(t_k - t_0)$ ділиться на відрізки довжиною Δt; таким чином, усього вийде $N = (t_k - t_0)/\Delta t$ кроків. У результаті розрахунку прийде формулу Ейлера застосувати для кожного кроку, тобто N раз. Але варто мати на увазі, що помилки ε_i на кожному *i-ом* кроці (у найпростішому випадку) складаються, а загальна помилка швидко накопичується (див. мал. 10.4). І в цьому складається істотний недолік даного методу. Хоча за допомогою цього методу можна одержати (у чисельному виді) рішення будь-якого диференціального рівняння (у тому числі й нерозв'язного аналітично). Зменшуючи крок, ми одержуємо більше точні рішення, але при цьому не слід забувати, що збільшення числа кроків веде до обчислювальних витрат і зниження швидкодії. Крім того, при великій кількості ітерацій у розрахунок вноситься інша істотна погрішність через обмежену точність обчислювальних машин і помилок округлення.

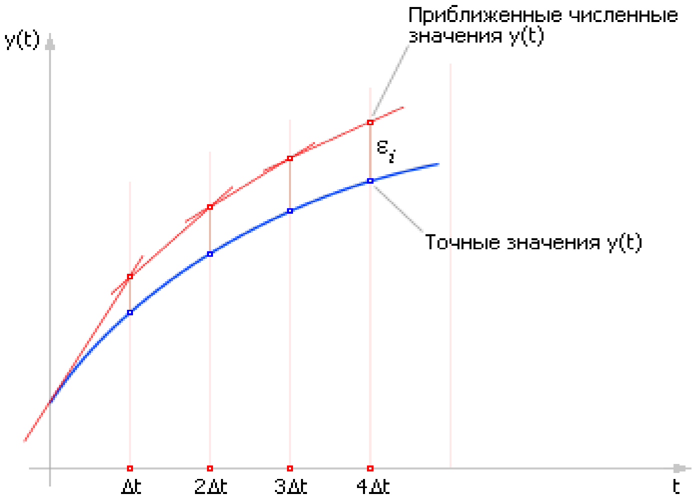

Рис. 10.4. Наростання сумарної помилки в методі Ейлера на ряді кроків

Задача 1. Дано диференціальне рівняння $y' = 2ty$. Задано початкове положення системи: $y(0) = 1$. Потрібно знайти $y(t)$, тобто поводження системи на інтервалі часу t від 0 до 1.

Аналітичний спосіб рішення задачі 1

$$y' = 2ty.$$

Методом поділу змінних знайдемо:

$$y'/y = 2t$$

$$\int \frac{y'}{y} dt = \int 2t\,dt$$

Будемо інтегрувати від 0 до t_i, тоді відповідно до правил інтегрування маємо:

$$\ln y(t)\Big|_0^{t_i} = t^2\Big|_0^{t_i}$$

$$\ln y(t_i) - \ln y(0) = t_i^2$$

$$\ln y(t_i) - \cancelto{0}{\ln 1} = t_i^2$$

$$y(t_i) = e^{t_i^2}$$

Отримане аналітичне рішення характеризується тим, що воно є абсолютно точним, але якщо рівняння виявиться скільки-небудь складним, то рішення не буде знайдено зовсім. Аналітичний шлях рішення не універсальний.

Чисельний спосіб рішення задачі 1

Чисельний спосіб рішення припускає, що розрахунок буде вестися по формулі Ейлера на ряді послідовних кроків. На кожному кроці рішення має свою помилку (див. мал. 10.2), оскільки на кожному кроці крива заміняється прямим відрізком.

При алгоритмічній реалізації розрахунок реалізується циклом, у якому змінюється t (лічильник t) і y:

$$t := t + \Delta t$$
$$y := y + 2 \cdot t \cdot y \cdot t$$

Блок-схема при реалізації методу на комп'ютері показана на мал. 10.5.

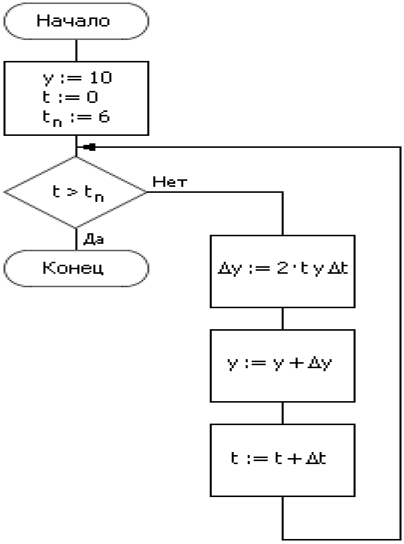

Рис. 10.5. Блок-схема реалізації методу Ейлера

У реалізації Стратум запис буде виглядати так (наявність символу «~» при t):

```
t := t + Δt
 y := y + 2 · ~t · y ·
Δt
```

Будемо шукати значення y розглянутого раніше приклада в чисельному виді на проміжку від $T = 0$ до $T = 1$. Візьмемо число кроків $n = 10$, тоді крок приросту Δt складе: $\Delta t = (1 - 0)/n = (1 - 0)/10 = 0.1$.

Таблиця 10.1.
Чисельний розрахунок рівняння методом Ейлера
й порівняння результату з точним рішенням на кожному кроці

i	t_i	$y_i = y_{i-1} + y'_{i-1} \cdot \Delta t$	$y'_i = 2t_i \cdot y_i$	$\Delta y_i = y'_i \cdot \Delta t$	$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$	$y_{\text{точн.}} = \exp(t_i^2)$
0	0.0	1	0	0	1	1
1	0.1	1	0.2	0.02	1.02	1. 0101
2	0.2	1.02	0. 408	0. 0408	1. 0608	1. 0408
3	0.3	1. 061	0. 636	0. 0636	1. 1246	1. 0942
4	0.4	1. 124	0. 900	0. 0900	1. 2140	1. 1735
5	0.5	1. 214	1. 214	0. 1214	1. 3354	1. 2840
6	0.6	1. 336	1. 603	0. 1603	1. 4963	1. 4333
7	0.7	1. 496	2. 095	0. 2095	1. 7055	1. 6323
8	0.8	1. 706	2. 729	0. 2729	1. 9789	1. 8965
9	0.9	1. 979	3. 561	0. 3561	2. 3351	2. 2479
10	1.0	2. 335	4. 669	0. 4669	2. 8019	2. 7183

Зверніть увагу на те, що розраховане чисельно значення (y_{i+1}) відрізняється від точного ($y_{точн.}$), і погрішність (різниця стовпців y_{i+1} й $y_{точн.}$) у процесі розрахунку наростає подібно тому, як було показано на мал. 10.4.

Тепер підрахуємо відносну погрішність σ для розрахункового значення $y(1)$, отриманого чисельно, у порівнянні з теоретичним точним $y_{теор.}$ по наступній формулі:

$$\sigma = (1 - y_{расч.}/y_{теор.}) \cdot 100\%$$

і зрівняємо σ при різних значеннях Δt.

Якщо будемо міняти значення кроку Δt, наприклад, зменшувати крок, те відносна погрішність розрахунку теж буде зменшуватися. От що вийде при обчисленні значення $y(1)$ з різними значеннями кроку (див. табл. 10.2).

Таблиця 10.2.
Залежність погрішності
розрахунку від розміру кроку Δt

$\boldsymbol{\Delta t}$	$\boldsymbol{y_{расч.}(1)}$	$\boldsymbol{y_{теор.}(1)}$	$\boldsymbol{\sigma}$
1/10	2. 3346	2. 7183	14%
1/20	2. 5107	2. 7183	8%
1/100	2. 6738	2. 7183	2%

Як бачимо, зі зменшенням кроку приросту Δt зменшується величина відносної погрішності, а виходить, підвищується точність розрахунку.

Зверніть увагу, що зміна кроку в 10 разів (з 1/10 до 1/100) веде до зміни величини помилки приблизно теж в 10 разів (з 14% до 2%). При зміні кроку в 100 разів помилка приблизно зменшиться теж в 100 разів. Іншими словами розмір кроку й помилка для методу Ейлера зв'язані лінійно. Хочете зменшити в 10 разів помилку — зменшуйте в 10 разів крок і збільшуйте відповідно в 10 разів кількість обчислень. Цей факт у математику прийнято позначати символом $\varepsilon = O(\Delta t)$, а метод Ейлера називають методом першого порядку точності.

Оскільки в методі Ейлера помилка досить велика й від кроку до кроку накопичується, а точність пропорційна кількості обчислень, то метод Ейлера звичайно застосовують для грубих розрахунків, для оцінки поводження системи в принципі. Для точних кількісних розрахунків застосовують більше точні методи.

Примітки

1. Кожен чисельний метод має точність, оскільки результат відрізняється від теоретичного. Точність методу залежить від величини кроку. Різні методи мають різну точність. Порядок залежності точності від величини кроку позначають як $O(h)$. У методу Ейлера перший порядок точності, залежність помилки від величини кроку лінійна.
2. Якщо при зменшенні кроку межа y_n прагне до значення $y_{\text{теор.}}$, те говорять, що метод має збіжність. Дослідників цікавить швидкість збіжності методу.
3. Метод повинен бути стійкий. Стійкість пов'язана з деякою критичною величиною кроку. При прояві нестійкості спостерігається повне перекручування якісної картини розрахунку, «розбовтка» результату.
4. При виборі методу рекомендується спочатку домогтися стійкості, а усередині області стійкості — збіжності результату. Стійкість забезпечує якісну картину. Збіжність забезпечує кількісний результат (див. також мал. 10.10).

Викладене в пп. 1-4 пояснимо на прикладі.

Приклад. Нехай

$$
\begin{cases}
\dfrac{dA}{dt} = (B - A),\ A(0) = 8 \\
\dfrac{dB}{dt} = (A - B),\ B(0) = 5
\end{cases}
$$

Якісно це рівняння описують процес теплообміну між двома тілами, температури яких у деякий момент часу позначимо як A й B. Взагалі A й B — змінні, мінливі в часі t. Знайти поводження системи означає, що треба знайти, як будуть мінятися температури $A(t)$ і $B(t)$.

Інтуїтивно ясно, що при початковій різниці температур $A = 8$ й $B = 5$ температури тіл поступово згодом повинні вирівнятися, тому що більше гаряче тіло буде віддавати енергію більше холодному, і його температура буде зменшуватися, а більше холодне тіло буде приймати енергію від більше гарячого, і його температура буде збільшуватися. Процес теплообміну закінчаться (тобто зміни припиняться) тоді, коли температури двох тіл стануть однаковими.

Проведемо кілька розрахунків поводження $A(t)$ і $B(t)$ з різною величиною кроку Δt.

Будемо брати різну величину кроку Δt і знаходити відповідні значення A й B у часі по наступних формулах Ейлера:

$$A^{\text{нов.}} = A^{\text{пред.}} + (B^{\text{пред.}} - A^{\text{пред.}}) \cdot \Delta t,$$
$$B^{\text{нов.}} = B^{\text{пред.}} + (A^{\text{пред.}} - B^{\text{пред.}}) \cdot \Delta t.$$

Розрахунок при $\Delta t = 2$ (табл. 10.3).

Таблиця 10.3.
Зміна температур тіл при чисельному розрахунку із кроком 2

№ кроку	*t*	*A*	*B*
0	0	8	5
1	2	2	11
2	4	20	–7

Спостерігається явище «розбовтки» (див. мал. 10.6). Нестійке рішення. З фізичних міркувань очевидно, що так поводитися два тіла в процесі теплообміну не можуть.

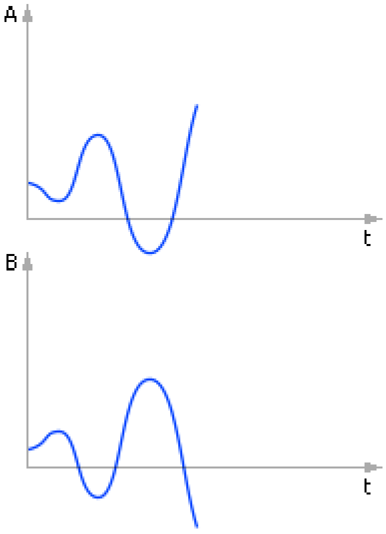

Рис. 10.6. Система поводиться якісно невірно. Рішення хитливо

Розрахунок при $\Delta t = 1$ (табл. 10.4).

Таблиця 10.4.
Зміна температур
тіл при чисельному
розрахунку із кроком
1

№ **кроку**	***t***	***A***	***B***
0	0	8	5
1	1	5	8
2	2	8	5

Спостерігається поводження рішення системи на границі стійкості (див. мал. 10.7).

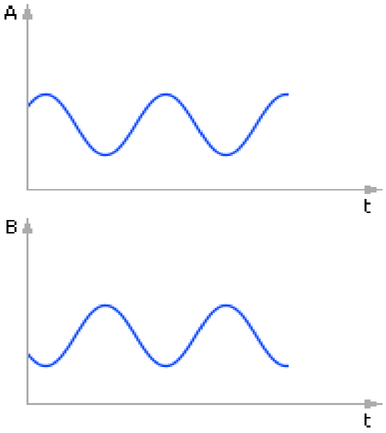

Рис. 10.7. Система поводиться якісно невірно. Рішення перебуває на грані стійкості

Розрахунок при Δt = 0.5 (табл. 10.5).

Таблиця 10.5.
Зміна температур тіл при чисельному розрахунку із кроком 0.5

№ кроку	***t***	***A***	***B***
0	0	8	5
1	0.5	6.5	6.5
2	1.0	6.5	6.5

Рішення стійко, відповідає правильній якісній картині (див. мал. 10.8). Температури тіл поступово зближаються, стають згодом однаковими. Але рішення поки має більшу погрішність.

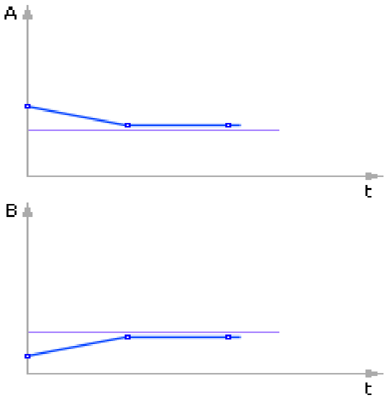

Рис. 10.8. Система поводиться якісно правильно. Рішення (поводження системи) має більшу погрішність

Розрахунок при Δt = 0.1 (табл. 10.6).

Таблиця 10.6.
Зміна температур тіл при чисельному розрахунку із кроком 0.1

№ кроку	***t***	***A***	***B***
0	0	8	5
1	0.1	7.7	5.3
2	0.2	7.46	5.54
3	0.3	7.27	5.73
4	0.4	7.12	5.88
5	0.5	7.00	6.00

Рішення стійко. Рішення більш точно (див. мал. 10.9).

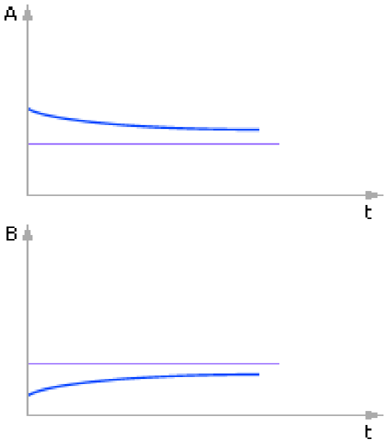

Рис. 10.9. Система поводиться якісно вірно.
Кількісно рішення більш точно

Роль зміни величини кроку ілюструє мал. 10.10.

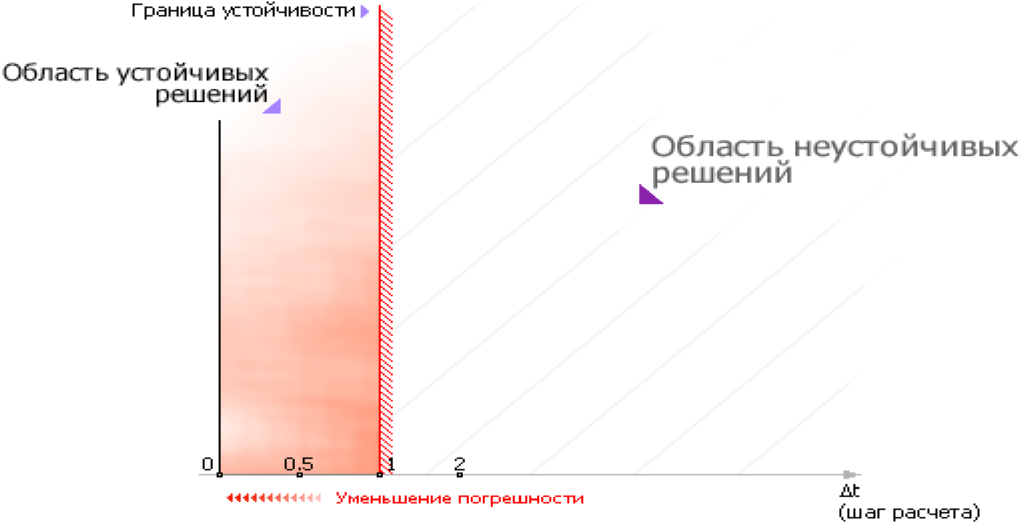

Рис. 10.10. Зв'язок величини кроку розрахунку зі стійкістю методу і його точністю (на прикладі)