Лекція 11.

Побудова моделі динамічної системи у вигляді диференціальних рівнянь і розрахунок її методом Ейлера

Виконаємо побудову моделі динамічної системи у вигляді диференціальних рівнянь і розрахунок її методом Ейлера на прикладі.

Приклад. Нехай досліджується система двох матеріальних тіл **А** й **В** з різними теплофізичними властивостями (див. мал. 11.1). Система контактує з опорою з температурою $\mathbf{T_п}$ і поміщена в зовнішнє середовище з температурою $\mathbf{T_c}$. Цікавить протікання процесу зміни температур тел.

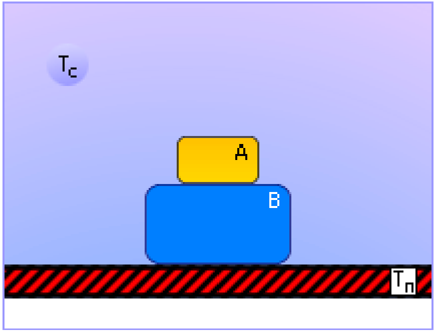


Рис. 11.1. Система взаємодіючих тіл у задачі теплопровідності

Як видно, у процесі життя в системі змінюються (можуть змінитися) чотири показники: температури тіл **A**, **B**, $\mathbf{T_c}$, $\mathbf{T_п}$. Виходить, ми маємо справу із чотирма змінними, залежними від часу (оскільки змінні міняють свої значення згодом). Уведемо ці змінні: $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$, $X_4(t)$.

Для побудови математичної моделі даної системи відіб'ємо процес теплопередачі у вигляді графа залежностей (мал. 11.2).

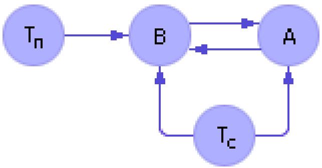


Рис. 11.2. Граф залежності змінні системи

Якщо мати на увазі змінні $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$, $X_4(t)$, то граф буде виглядати так, як показано на мал. 11.3.

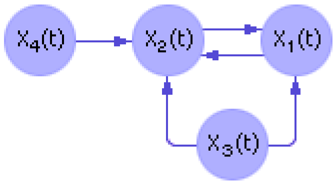


Рис. 11.3. Граф залежності змінні моделі

Стрілка від **A** до **B** позначає зміну температури $X_2(t)$ об'єкти **B** під впливом об'єкта **A**. Зрозуміло, що ряд стрілок (наприклад, від **B** до $\mathbf{T_c}$, від **A** до $\mathbf{T_п}$ й ін.) відсутній, тобто немає впливу одних параметрів на інші: тіло **B** не в змозі скільки-небудь істотно нагріти відкриту атмосферу, а тіло **A** — масивну й потенційно нескінченну опору. Строго говорячи, такий вплив є, але воно настільки незначно, що розумно їм зневажити.

Поскольку змінних чотири, то нам необхідно, як мінімум, чотири закони, що описують їхню зміну. У загальному виді, з огляду на, від яких змінних залежить кожен показник, одержимо:

- для тіла **A** маємо залежність температури $X_1(t)$ від температури тіла **B** і температури атмосфери $\mathbf{T_c}$: $\mathrm{d}_1(t)/\mathrm{d}t = f_1(X_2(t), X_3(t))$;
- для тіла **B** маємо залежність температури $X_2(t)$ від температури тіла **A**, температури атмосфери $\mathbf{T_c}$ й опори $\mathbf{T_п}$: $\mathrm{d}_2(t)/\mathrm{d}t = f_2(X_1(t), X_3(t), X_4(t))$.

Стрілки, що входять у відповідний кружок, указують на кількість параметрів, що впливають, а те, звідки вони виходять, визначає конкретні назви змінних.

Для середовища закон має вигляд: $X_3(t) = \mathrm{const}$, тобто, температура атмосфери $\mathbf{T_c}$ не залежить від інших складових даної системи й, відповідно, не змінюється. Для опори закон має вигляд: $X_4(t) = \mathrm{const}$, тобто, температура опори $\mathbf{T_п}$ не залежить від інших складових даної системи й, відповідно, не змінюється.

Система законів у першому наближенні сформована. Залишається визначити їхній конкретний вид: розкрити, що із себе представляють значення виражень f_1 й f_2. **Тому що ми маємо справу із системою, що залежить від свого минулого поводження на кожному наступному кроці, то ми застосували для її опису диференціальні рівняння**.

Основний динамічний закон для опису зміни змінної (рівняння руху) має вигляд:

$$\mathrm{d}(t)/\mathrm{d}t = w(x(t), y(t), z(t), \ldots)...$$

Фізичний зміст запису такий. Похідна в лівій частині рівняння, по визначенню, показує, наскільки змінюється X зі зміною часу t. В інженерії подібна зміна називається швидкістю, темпом, тенденцією. Отже, щоб записати закон зміни змінної в диференціальних рівняннях, треба вказати швидкість зміни змінних.

Спочатку розглянемо перше рівняння:

$$\mathrm{d}_1(t)/\mathrm{d}t = f_1(X_1(t), X_2(t), X_3(t)).$$

Поява X_1 у правій частині означає, що швидкість зміни температури залежить від власного стану тіла. Що таке f_1? — це функція, що зв'язує змінні X_1, X_2, X_3 між собою. Тобто, змінні з'єднані один з одним знаками операцій.

Гляньте на граф на мал. 11.3. Які пари змінних взаємодіють? Стрілки з'єднують $X_1(t)$ з $X_2(t)$, $X_1(t)$ з $X_3(t)$, тобто має місце два процеси, що впливають на швидкість. Ми розглядаємо процеси теплообміну тел. Відомо, що два процеси теплообміну незалежні, тобто не управляють один одним. Виходить, результати двох процесів можна складати, вони як би накладаються один на одного. Дійсно, тепло, передане від одного тіла, складається з теплом, переданим від іншого. Таким чином, маємо:

$$\mathrm{d}_1(t)/\mathrm{d}t = g_1(X_1(t), X_2(t)) + g_2(X_1(t), X_3(t)).$$

Розкриємо структуру виражень, що *залишилися,* $_{\mathrm{g}}1$ *й* $_{\mathrm{g}}2$. Дуже зручно, що g_1 ніяк не залежить від g_2 і може розглядатися окремо. Такий поділ можливо, тому що процеси g_1 й g_2 незалежні. Процес g_1 іде незалежно від того, іде чи ні процес g_2. Незалежність процесів і лінійність (аддитивность) виражень — поняття зв'язані. Отже: тому що процеси g_1 й g_2 незалежні, то забудемо на якийсь час про g_2.

Який знак потрібно поставити між $X_1(t)$ і $X_2(t)$ у виразенні g_1? Можливі варіанти:

$$X_1(t) + X_2(t);$$
$$X_2(t) - X_1(t);$$
$$X_1(t) - X_2(t);$$
$$X_1(t) \cdot X_2(t);$$
$$X_1(t) \,/\, X_2(t);$$
$$X_2(t) \,/\, X_1(t);$$
$$X_1(t) \wedge X_2(t);$$
$$X_2(t) \wedge X_1(t)$$

і далі більше складні, наприклад, $X_1{}^2(t) \cdot \cos(X_2(t))/\exp(X_1(t))$. Дослідник почне з найбільш простих виражень - природа побудована просто. І тільки якщо найпростіші вираження не задовольняють дослідника, він переходить до більше складних варіантів опису.

Те, що було тільки що сказане вище, зведено в системотехніку в ранг принципу: «не вводь сутностей без потреби» (принцип Оккама).

Отже, нехай: $\mathrm{d}_1(t)/\mathrm{d}t = X_1(t) + X_2(t)$. Які є якісні варіанти в цієї фізичної системи?

- $X_1(t) > X_2(t)$. Тіло **A** тепліше тіла **B**. Теплопоток при контакті двох тіл спрямований від **A** до **B**. Тіло **A** віддає тепло тілу **B**. Тобто в процесі контакту значення $X_1(t)$ падає — зменшується. (Нас цікавить майбутнє саме $X_1(t)$, а не $X_2(t)$ — див. рівняння: $\mathrm{d}_1(t)/\mathrm{d}t$). Подивимося, чи не так це в рівнянні-гіпотезі $\mathrm{d}_1(t)/\mathrm{d}t = X_1(t) + X_2(t)$? Сума $X_1(t) + X_2(t)$ може приймати як позитивні, так і негативні значення, отже, значення $\mathrm{d}_1(t)/\mathrm{d}t$ також може бути як позитивним, так і негативним, а це, у свою чергу, виходить, що $X_1(t)$ те росте, то падає. Але це суперечить фізичній картині, розглянутої ледве вище: ми уклали, що за умови $X_1(t) > X_2(t)$ $X_1(t)$ може тільки лише зменшуватися. Тому варіант гіпотези $\mathrm{d}_1(t)/\mathrm{d}t = X_1(t) + X_2(t)$ неприйнятний і треба пробувати іншої.

Пусть тепер $\mathrm{d}_1(t)/\mathrm{d}t = X_2(t) - X_1(t)$. Які є якісні варіанти в цієї фізичної системи?

- $X_1(t) > X_2(t)$. Тіло **A** тепліше тіла **B**. Теплопоток при контакті двох тіл спрямований від **A** до **B**. Тіло **A** віддає тепло тілу **B**. Тобто в процесі контакту значення $X_1(t)$ падає — зменшується. Подивимося, чи не так це в рівнянні? $X_1(t) > X_2(t)$, тобто $X_2(t) - X_1(t) < 0$, виходить, $\mathrm{d}_1(t)/\mathrm{d}t < 0$, отже, $X_1(t)$ падає. Висновок не суперечить фізичній картині. Виходить, поки даний варіант прийнятний і треба перевірити його на інших якісних ситуаціях.
- $X_1(t) < X_2(t)$. Тіло **A** холодніше тіла **B**. Теплопотік при контакті двох тіл спрямований від **B** до **A**. Тобто в процесі контакту значення $X_1(t)$ росте — збільшується. Подивимося, чи не так це в рівнянні? $X_1(t) < X_2(t)$, тобто $X_2(t) - X_1(t) > 0$, виходить, $\mathrm{d}_1(t)/\mathrm{d}t > 0$, отже, $X_1(t)$ росте. Висновок не суперечить фізичній картині. Виходить, поки даний варіант прийнятний і треба перевіряти його далі.

- $X_1(t) = X_2(t)$. Температура тіла **A** дорівнює температурі тіла **B**. Теплопоток при контакті двох тіл дорівнює нулю. Тобто значення $X_1(t)$ не змінюється — тіло **A** не віддає й не приймає тепло. Подивимося, чи не так це в рівнянні? $X_1(t) = X_2(t)$, виходить, $X_2(t) - X_1(t) = 0$, виходить, $\mathrm{d}_1(t)/\mathrm{d}t = 0$, виходить, $X_1(t)$ не змінюється. Висновок не суперечить фізичній картині. Виходить, даний варіант приймається, тому що він правильно (поки тільки якісно!) відбиває фізичну картину у всіх випадках.

Інших варіантів існування системи немає, і розгляд закінчується.

Забувши на якийсь час про g_1, так само можна розглянути й g_2, що пропонується проробити читачеві самостійно. В остаточному підсумку ми одержимо:

$$\mathrm{d}_1(t)/\mathrm{d}t = (X_2(t) - X_1(t)) + (X_3(t) - X_1(t)).$$

Далі. Тому що, по-перше, у різних матеріалів різниця температур впливає на швидкість зміни температури тіла різним способом й, по-друге, швидкості двох процесів (у двох різних пар матеріалів) можуть бути різними, то скорегуємо модель, використовуючи коефіцієнт теплопровідності, що відіграє роль підсилювача (ослабителя) процесів. Це коефіцієнт впливу зв'язку на об'єкт. При $K = 0$ вплив відсутнє, зв'язок відключається. При $K = 0.0001$ вплив слабке. При $K = 1000$ вплив зв'язку величезний. Зрозуміло, що коефіцієнт коштує при вираженні процесу: K **?** $(X_2(t) - X_1(t))$, де «**?**» означає знак деякої операції, а саме — операції множення. Ця операція дає *залежність* одного члена від іншого (у нашому випадку K від $X_2(t) - X_1(t)$).

При $K = 0$, які б значення не приймало вираження $X_2(t) - X_1(t)$, результат $K \cdot (X_2(t) - X_1(t))$ дає 0. При $K = 0.1$ значення вираження примусово послабляється в 10 разів. Те ж саме вірно й з боку вираження $X_2(t) - X_1(t)$ — це природно, адже загальне вираження $K \cdot (X_2(t) - X_1(t))$ симетрично. Виходить, мультиплікативний зв'язок моделює властивість *нелінійності* й взаємозалежності процесів (один може зводити нанівець дію іншого). Додавання такою властивістю не володіє.

В підсумку модель має вигляд:

$$\mathrm{d}_1(t)/\mathrm{d}t = K_{21} \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t)).$$

Наприкінці варто перевірити розмірності рівняння; розмірність лівої частини повинна збігтися з розмірністю правої. Нагадаємо тільки, що похідна має розмірність показника X, діленого на одиницю часу.

Тепер ми в стані синтезувати аналогічно друге рівняння (рекомендуємо перевірити правильність даного рівняння самостійно):

$$d_2(t)/dt = K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)).$$

Рівняння зміни температури атмосфери: $d_3(t)/dt = 0$. Тобто $X_3 = \text{const}$ (X_3 не змінюється).

Врівняння зміни температури опори: $d_4(t)/dt = 0$. Тобто $X_4 = \text{const}$ (X_4 не змінюється).

Вся система рівнянь у зборі має вигляд:
$d_1(t)/dt = K_{21} \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t))$;
$d_2(t)/dt = K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t))$;
$d_3(t)/dt = 0$;
$d_4(t)/dt = 0$.

По фізичних міркуваннях ясно: скільки тепла випливає з **А** в **В**, стільки ж тепла надходить в **У** з **А**, тобто $K_{21} = K_{12}$.

ДО запису загальної моделі залишається додати конкретні значення коефіцієнтів теплопровідності ($K_{12} = K_{21}$, K_{31}, K_{32}, K_{42}) і початковий стан системи:

$$X_1(0) = a,$$
$$X_2(0) = b,$$
$$X_3(0) = c,$$
$$X_4(0) = d,$$

де a, b, c, d — числа, що вказують температуру відповідного об'єкта в момент часу $t = 0$.

Отже, побудована система звичайних диференціальних рівнянь у канонічному виді від єдиної незалежної змінної часу.

СИСТЕМ — тому що в наявності є кілька рівнянь.
ЗВИЧАЙНИХ — похідна використана звичайна, а не приватна, тому що використано одного змінна часу.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ — у рівнянні зустрічається вираження похідній d/dt.
РІВНЯНЬ — у вираженнях є знак уравнивания.
У КАНОНІЧНОМУ ВИДІ — похідна не коштує під знаком якої-небудь функції, зустрічається один раз і тільки в лівій частині рівняння. У правій частині які-небудь похідні відсутні.
ЄДИНОЇ — змінна, по якій беруть похідну, одна у всіх рівняннях (час t).
НЕЗАЛЕЖНОЇ ЗМІННОЇ — змінна t не залежить більше ні від яких змінних і змінюється сама по собі.

БУДЬ-ЯКУ ДИНАМІЧНУ СИСТЕМУ МОЖНА ПРИВЕСТИ ДО ДАНОГО ВИДУ!

Важливе зауваження. Пророблена вище робота з підтвердження гіпотез, що втримуються в моделі даного приклада, природно, не доводить абсолютної правильності прийнятої моделі. Перевірки можуть бути продовжені. Якщо при черговій перевірці гіпотеза буде відкинута, то модель слід знову уточнити. Однієї з додаткових перевірок може бути, наприклад, перевірка на відкритість системи. Виконаємо таку перевірку.

Помітимо, що вище ми одержали *відкриту систему*, тобто таку, чиє сумарне тепло не постійно, а може змінюватися. Це видно з асиметрії стрілок на графі. Перевіримо цей факт математично, формально, для чого складемо ліві частини всіх рівнянь й, окремо, праві частини. Ліворуч ми маємо наступне:

$$\mathrm{d}X_1(t)/\mathrm{d}t + \mathrm{d}_2(t)/\mathrm{d}t + \mathrm{d}_3(t)/\mathrm{d}t + \mathrm{d}_4(t)/\mathrm{d}t$$

або

$$\mathrm{d}(X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) + X_4(t))/\mathrm{d}t$$

або

$$\mathrm{d}X_{\text{системы}}(t)/\mathrm{d}t.$$

У правій частині ми маємо наступне:

$$K_{21} \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t)) + K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t))$$

або (з обліком того, що $K_{21} = K_{12}$)

$$K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)).$$

І, нарешті, разом:

$$\mathrm{d}X_{\text{системы}}(t)/\mathrm{d}t = K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)),$$

із чого треба, що ліва частина явно не дорівнює нулю і є витік або приплив тепла в систему ззовні.

У випадку закритої системи рівняння мали б вид:
$d_1(t)/dt = K_{21} \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t));$
$d_2(t)/dt = K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t));$
$d_3(t)/dt = K_{13} \cdot (X_1(t) - X_3(t)) + K_{23} \cdot (X_2(t) - X_3(t)) + K_{43} \cdot (X_4(t) - X_3(t));$
$d_4(t)/dt = K_{24} \cdot (X_2(t) - X_4(t)) + K_{34} \cdot (X_3(t) - X_4(t)).$

При додаванні це дає: $dX_{\text{системы}}(t)/dt = 0$ — рівняння закритої системи, у яку ззовні нема чого не притікає й з якої нічого не минає. Хоча усередині системи відбуваються зміни (перерозподіл тепла), сумарна температура системи незмінна. Ні перша модель (модель відкритої системи), ні друга модель (модель закритої системи) не є «поганими». Просто досягнуті різні цілі, дані різні подання дослідника про процеси, про систему в цілому.

Динамічна система, що ми розглядали вище, — це загальний випадок. Досить важливо, що з її завжди можна «даром» одержати *статичну систему*, для чого потрібно зажадати: $X_i(t + \Delta t) = X_i(t)$, у результаті чого маємо: $\mathrm{d}X_i(t)/\mathrm{d}t = 0$. Інакше кажучи, запис $X_i(t + \Delta t) = X_i(t)$ означає, що минуле дорівнює сьогоденню, тобто стан системи не міняється. Тоді від рівнянь залишається:

$$K_{21} \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t)) = 0$$

$$K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)) = 0.$$

Це рівняння статики.

Після побудови базової системи дослідник може вводити додаткові конструктивні елементи в систему тел. Додамо, наприклад, нагрівач (див. мал. 11.4).

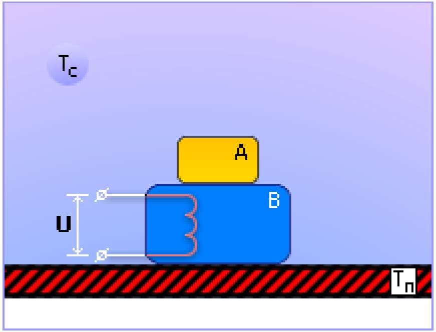


Рис. 11.4. Система взаємодіючих тіл зі слабким нагрівачем у задачі теплопровідності

Граф зміниться, тому що на тіло **В** буде діяти додатковий об'єкт — нагрівач. Позначимо його температуру змінної $X_5(t)$ (див. мал. 11.5).

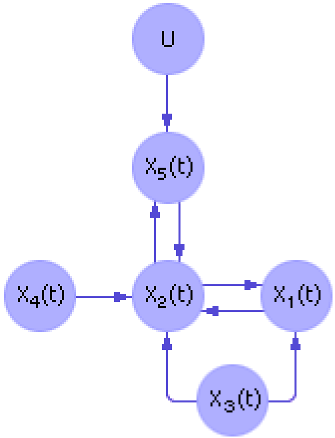


Рис. 11.5. Граф залежності змінні моделі зі слабким нагрівачем

Зміни в записі будуть стосуватися тільки другого рівняння, що описує зміну змінної X_2 у часі. Крім того, нам знадобиться рівняння нагрівача, тому що в системі з'явилася додаткова змінна $X_5(t)$ (вершина графа) і закон її зміни повинен бути визначений.

При записі рівняння варто розрізняти, до якого типу ставиться джерело тепла - слабкому або сильному.

Розглянемо спочатку гіпотезу про слабке джерело. Зверніть увагу: якщо нагрівач буде гріти сильніше тіла **В**, те, звичайно, тіло **В** нагрівається від нагрівача, але якщо нагрівач у якийсь момент виявиться холодніше тіла **В**, те тіло **В** саме віддає тепло нагрівачу, як би дивно це, на перший погляд, не здавалося.

Тому що таке джерело енергії може не тільки нагрівати інші тіла, але й нагріватися від них сам, він називається слабким. Тобто від послуг такого джерела енергії можна відмовитися, оскільки він перебуває в рівному з іншими тілами положенні, може впливати на них і може випробовувати їхній вплив. На сильне джерело інші тіла впливати не можуть, а сам він - може на них впливати, НАВ'ЯЗУЮЧИ ЇМ СВОЮ ВОЛЮ БЕЗУМОВНО.

Зрозуміло, що в рівнянні для тіла **B** з'явиться додатковий доданок, аналогічне раніше розглянутим:

$$d_2(t)/dt = K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)) + K_{52} \cdot (X_5(t) - X_2(t)).$$

Рівняння нагрівача може бути записане так:

$$d_5(t)/dt = (K \cdot U(t) - X_5(t))/L + K_{25} \cdot (X_2(t) - X_5(t)),$$

де $U(t)$ — напруга харчування джерела.

Початкові умови $X_5(0)$ і функція роботи джерела $U(t)$ повинні бути задані:

$$X_5(0) = h,$$
$$U(t) = f(t).$$

Рівняння зв'язує причину (напруга джерела харчування) і наслідок (температура нагрівача). Властивості цього елемента такі, що при виході на робочий режим нагрівач підтримує постійну температуру. При включенні нагрівача робоча температура встановлюється згодом, поступово наростаючи, при вимиканні джерела нагрівач поступово остигає. Очевидно, що процес нагрівання й остигання нагрівача інерційний. Фактично, для опису цих властивостей нагрівача досить записати аперіодичний закон (*який ми раніше вже обговорювали* в лекции 04) зміни його температури $X_5(t)$ стосовно входу $U(t)$, що ми й зробили. У рівнянні врахований коефіцієнт підсилення K між входом $U(t)$ і виходом $X_5(t)$, инерционность процесу нагрівання L і коефіцієнт теплопередачі K_{25} між тілами $X_2(t)$ і $X_5(t)$.

Теперь розглянемо гіпотезу про сильний нагрівач. Це випадок, коли нагрівач улаштований таким чином, що випромененa їм енергія не може відбитися тілом **B**, або якщо енергія від тіла **B** не може потрапити до нагрівача, або якщо тіло **B** не може «відмовитися» від послуг нагрівача (див. мал. 11.6).

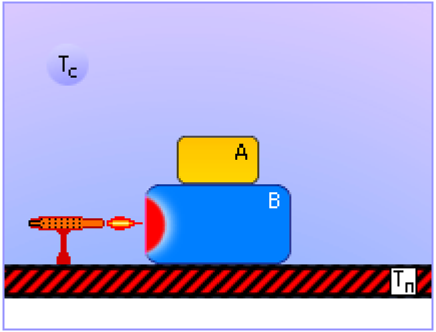


Рис. 11.6. Система взаємодіючих тіл
із сильним нагрівачем у задачі теплопровідності

На мал. 11.7 зображений граф залежностей для даного випадку.

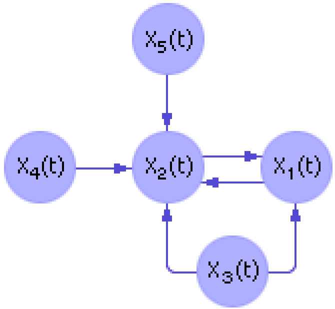


Рис. 11.7. Граф залежності змінні моделі із сильним нагрівачем

Зверніть увагу: неважливо, чи нагрітий нагрівач сильніше тіла **В** чи ні — тіло **В** буде одержувати від нього енергію в кожному разі, причому, у тім об'ємі, у якому цю енергію буде виділяти нагрівач. У рівнянні тіла **В** з'явиться додатковий доданок:

$$d_2(t)/dt = K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)) + K_{52} \cdot X_5(t).$$

Рівняння нагрівача може бути записане так:

$$d_5(t)/dt = f(t).$$

Початкові умови $X_5(0)$ і функція роботи джерела $f(t)$ повинні бути задані:

$$X_5(0) = h.$$

Але повернемося до розрахунку руху в часі динамічної системи, для якої є всі необхідні дані, є початковий стан ($X_i(0) = \mathrm{const}$). Можна по формулах (з використанням методу Ейлера, див. лекцію 10) обчислити швидкість її зміни й новий стан:

новий стан := старий стан + швидкість · відрізок часу.

Формально цей запис виглядає так:

$$dx(t)/dt = f(x(t))$$

або (у дискретній формі)

$$[x(t + \Delta t) – x(t)]/\Delta t = f(x(t))$$

і, остаточно,

$$x(t + \Delta t) = x(t) + f(x(t)) \cdot \Delta t.$$

Знаючи новий стан і вважаючи його вже досягнутим, тобто старим станом, використаємо ту ж формулу (підставляючи, звичайно, у неї вже нові значення). І так продовжуємо, додаючи всі новий відрізок часу, рухаючись у часі.

Ітак, ми перейшли до питання про метод розрахунку диференціальних моделей. Методом рішення диференціальних рівнянь, у загальному випадку, є інтегрування їх по незалежної змінної часу t. Найпростішим методом чисельного інтегрування диференціальних рівнянь є метод Ейлера (див. лекцію 10).

Зверніть увагу. При обчисленні по методу Ейлера необхідно обчислювати значення всіх параметрів системи *паралельно*, тому що похідна в кожен момент часу окремого параметра залежить як від значення самого параметра в цей момент часу, так і від значення іншого параметра в цей момент часу.

Розглянемо практично застосування методу Ейлера для розрахунку процесу зміни температур тіл системи. Задамо значення коефіцієнтів моделі: $K_{12} = K_{21} = 0.2$, $K_{31} = 0.1$, $K_{32} = 0.05$, $K_{42} = 0.1$. Задамо початкові умови системи (у момент часу $t = 0$): $X_1(0) = 30°$ C, $X_2(0) = 70°$ C, $X_3(0) = 22°$ C, $X_4(0) = 15°$ C. Вибираємо крок моделювання Δt рівний, наприклад, 0.2 с. Приймемо кінцеве значення часу моделювання за $T_k = 4$ с.

Підставимо значення коефіцієнтів:

$$X_1(t + \Delta t) = X_1(t) + [0.2 \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + 0.1 \cdot (22 - X_1(t))] \cdot \Delta t$$

$$X_2(t + \Delta t) = X_2(t) + [0.2 \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + 0.05 \cdot (22 - X_2(t)) + 0.1 \cdot (15 - X_2(t))] \cdot \Delta t$$

і приступаємо до моделювання. Процес моделювання й чисельних значень відбиті в табл. 11.1.

Таблиця 11.1.

Таблиця розрахунку зміни значень змінні системи в часі

t	$d_1(t)/dt$	$d_2(t)/dt$	$X_1(t)$	$X_2(t)$
0.0	7.20	–15.90	30	70
0.2	6.13	–14.50	31.44	66.82
0.4	5.18	–13.24	32.67	63.92
0.6	4.34	–12.10	33.70	61.27
0.8	3.60	–11.08	34.57	58.85
1.0	2.94	–10.16	35.29	56.63
1.2	2.36	–9.33	35.88	54.60
1.4	1.84	–8.59	36.35	52.74
1.6	1.39	–7.91	36.72	51.02
1.8	0.99	–7.30	37.00	49.44
2.0	0.64	–6.75	37.19	47.97

2.2	0.33	–6.25	37.32	46.62
2.4	0.06	–5.80	37.39	45.37
2.6	–0.18	–5.39	37.40	44.21
2.8	–0.38	–5.02	37.36	43.13
3.0	–0.56	–4.69	37.29	42.13
3.2	–0.71	–4.38	37.18	41.19
3.4	–0.85	–4.10	37.03	40.31
3.6	–0.96	–3.85	36.86	39.49
3.8	–1.06	–3.62	36.67	38.72
4.0	–1.14	–3.41	36.46	38.00

У часі поводження системи буде виглядати так, як показано на мал. 11.8.

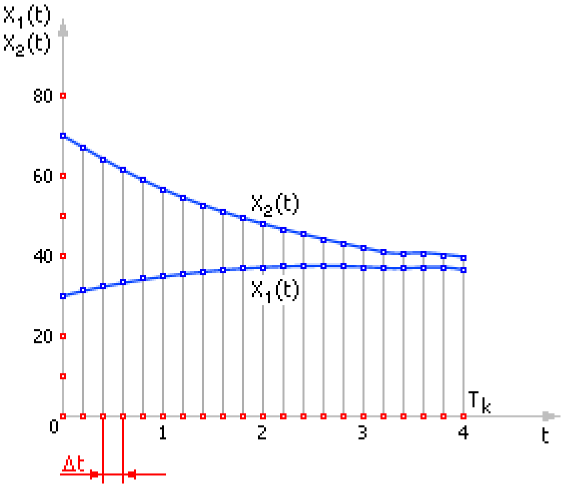


Рис. 11.8. Розрахункові траєкторії поводження системи тіл у задачі теплопровідності

Помітимо, що на мал. 11.8 показана не вся траєкторія, а тільки її частина. Розрахуйте всю траєкторію, подумайте й відповідайте на наступні питання:

- чому графіки в підсумку при великому часі розгляду прагнуть до числа 18.5;
- чому значення змінної X_1 спочатку збільшується, а потім падає;
- чому графіки мають переломи похідних;
- що треба змінити в умовах задачі, щоб графік X_1 увесь час убував?

Залежно від реалізації «машини», на якій автоматично буде імітуватися процес, запис може виглядати по-різному.

Формальний математичний запис

Приведемо нижче варіант формального математичного запису для випадку відкритої системи тіл зі слабким нагрівачем.

$d_1(t)/dt = K_{21} \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t))$

$d_2(t)/dt = K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)) + K_{52} \cdot (X_5(t) - X_2(t))$

$d_3(t)/dt = 0$

$d_4(t)/dt = 0$

$d_5(t)/dt = (K \cdot U(t) - X_5(t))/L + K_{25} \cdot (X_2(t) - X_5(t))$

$X_1(0) = a$

$X_2(0) = b$

$X_3(0) = c$

$X_4(0) = d$

$X_5(0) = h$

$U(t) = f(t)$

$K_{12} = 0.2$; $K_{21} = 0.2$; $K_{31} = 0.1$; $K_{32} = 0.05$; $K_{42} = 0.1$; $K_{52} = 0.4$; $K_{25} = 0.4$; $K = 1$; $L = 1$

$T_k = 4$

При реалізації на математичній машині середовища Stratum цей запис буде доповнена елементами (функціями) уведення й висновку інформації й командами керування (наприклад, «стіп»), а частина елементів буде захована (наприклад, при завданні початкових умов).

Іноді (коли це зручно) початкові умови можуть бути поміщені усередину рівнянь. Для цього в наступному записі ми скористаємося дельта-функцією Дирака (див. лекцію 31).

$d_1(t)/dt = K_{21} \cdot (X_2(t) - X_1(t)) + K_{31} \cdot (X_3(t) - X_1(t)) + a \cdot delta(t)$

$d_2(t)/dt = K_{12} \cdot (X_1(t) - X_2(t)) + K_{32} \cdot (X_3(t) - X_2(t)) + K_{42} \cdot (X_4(t) - X_2(t)) + K_{52} \cdot (X_5(t) - X_2(t)) + b \cdot delta(t)$

$d_3(t)/dt = c \cdot delta(t)$

$d_4(t)/dt = d \cdot delta(t)$

$d_5(t)/dt = (K \cdot U(t) - X_5(t))/L + K_{25} \cdot (X_2(t) - X_5(t)) + h \cdot delta(t)$

$U(t) := f(t)$

$K_{12} := 0.2;\ K_{21} := 0.2;\ K_{31} := 0.1;\ K_{32} := 0.05;\ K_{42} := 0.1;\ K_{52} := 0.4;\ K_{25} := 0.4;\ K := 1;\ L :$

$T_k := 4$

$t := t + \Delta t$

$osc2d(T, X_1)$

$stop(T > T_k)$

Нагадаємо, що $\mathrm{osc2d}(T, X_1)$ — функція, що малює на екрані крапку з координатами T й X_1 для кожного моменту часу. Вище дана функція наведена умовно: у дійсності треба використати кілька функцій для настроювання вікон, масштабу зображення, кольори, товщини, стилю лінії й тому подібного. Докладно реалізацію двомірного осцилографа в середовищі «Stratum-2000» ви можете подивитися в тексті іміджу OSCSpace2D.

Наведений вище варіант формального математичного запису має на увазі, що весь код укладений у рамках одного елемента (іміджу, якщо використати терміни середовища «Stratum-2000»). Буде набагато більш наочно, якщо розподілити код по окремих елементах, зв'язавши їх між собою зв'язками (див. мал. 11.9) — у цьому випадку структура проекту залишиться доступної для огляду; крім того, якщо буде потрібно змінити щось в одному із блоків, те такий підхід дозволить не міняти код в інших блоках. Ще один плюс такого підходу - окремі «цеглинки» схеми можуть бути застосовані неодноразово в готовому виді у вигляді копії іміджу.

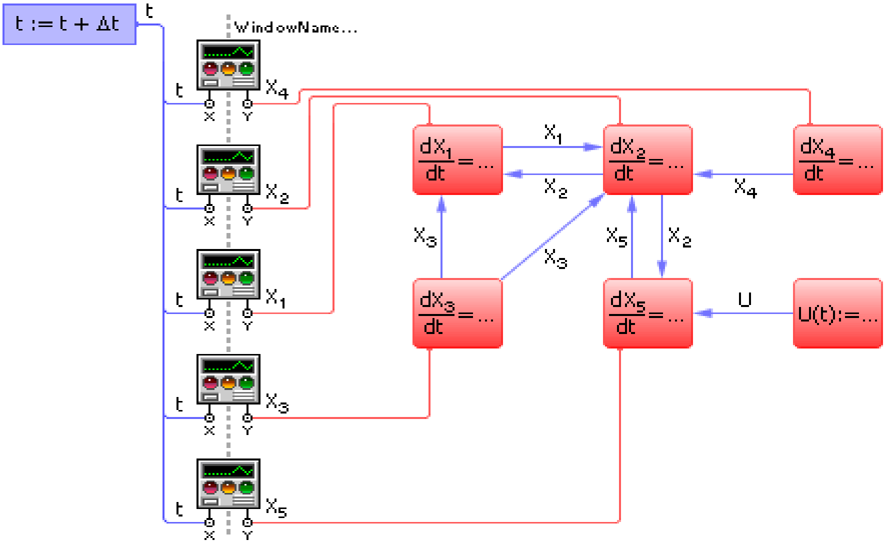
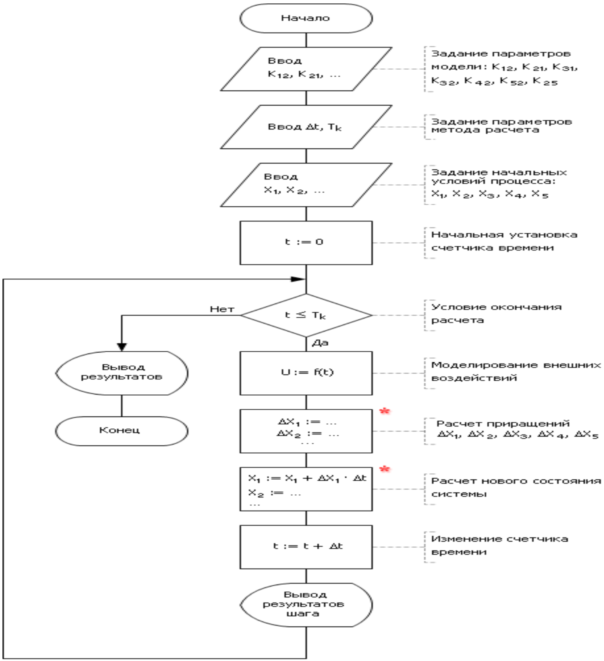


Рис. 11.9. Схема проекту в середовищі Stratum-2000, що реалізує повну модель теплопровідності системи тіл з елементами інтерфейсу

Алгоритмічна реалізація

У випадку реалізації на алгоритмічній машині варто скористатися алфавітом алгоритмів: блоками початку й кінця алгоритму, виводу-вводу-висновку інформації, завдання початкових умов, обчислювальними блоками, блоками умови, конструкціями циклу. На мал. 11.10 представлена блок-схема алгоритму, що імітує теплообмін між тілами.



* Обратите внимание, что блок расчета приращений и блок расчета нового состояния системы разделены для того, чтобы обеспечить синхронизацию расчета. Случай, когда блоки совмещены, может давать неверные результаты, так как может возникнуть эффект гонок. Это случай, когда вычисленная переменная участвует в вычислении других приращений, хотя должна использоваться в этом только на следующем шаге.

Рис. 11.10. Блок-схема алгоритму, що імітує теплообмін між тілами

Помітьте, що для реалізації нам знадобилися наступні інструменти:

- пристрою уведення інформації (для завдання параметрів моделі, параметрів методу розрахунку, завдання початкових умов процесу);
- пристрій висновку інформації;
- обчислювальні блоки для реалізації математичних формул;
- цикл для імітації перебігу часу.

У тілі циклу присутні:

- лічильник часу;
- умова виходу із циклу для контролю за часом моделювання;
- блок завдання зовнішніх впливів;
- блок розрахунку приростів;
- блок розрахунку нового стану системи;
- блок висновку поточних станів.

Тією чи іншою мірою вищезгадані блоки обов'язково присутні в кожному алгоритмі даного типу.