# Лекція 14.
# Уточнений метод Ейлера

Метод Ейлера для розрахунку диференціальних рівнянь має невелику точність розрахунку. Як було показано раніше (див. Лекцію 10), точність розрахунку в нього залежить від розміру кроку лінійно, залежність точності від кроку - першого ступеня. Тобто, щоб збільшити точність в 10 разів, треба зменшити крок в 10 разів. На практиці цікавляться більше зробленими методами. Питання коштує так: чи можна збільшити точність на порядок, але при цьому заощадити на кількості обчислень? Так, такі методи є. Модифікований метод Ейлера має точність другого порядку. У методі Ейлера похідна береться на початку кроку й по ній прогнозується рух системи на кінець кроку, уважаючи, що під час кроку похідна незмінна. Тобто протягом усього кроку похідна вважається тієї, який вона була на самому початку кроку. Це основне джерело неточності.

Поліпшення методу полягає в тому, що береться похідна не на початку кроку, а як проміжне або середнє на різних ділянках одного кроку. У різних варіантах методу обчислюють кілька похідних у різних частинах кроку й усредняют їх. Звичайно, у цьому випадку число обчислень збільшується, - але не в десятки разів, - а от точність зростає на порядок, у цьому й складається виграш.

Нехай, як і колись (див. Лекцію 10), потрібно вирішити рівняння $y' = f(x, y, t)$. Ідея уточненого методу Ейлера полягає в тому, що похідну обчислюють не в *i-ої* крапці, а між двома сусідніми крапками: $i$ й $i + 1$. Дана процедура складається з наступних кроків:

- у крапці $i$ обчислюють значення похідної:
  $f(x_i, y_i, t)$;
- роблять пів-кроку й обчислюють значення функції на середині відрізка:
  $y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i, t) \cdot \Delta t/2$;
- у крапці $i + 1/2$ обчислюють похідну:
  $f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}, t + \Delta t/2)$;
- робиться повний крок із крапки $i$ у крапку $i + 1$ за значенням уточненої похідної:
  $y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}, t + \Delta t/2) \cdot \Delta t$;
- значення $t$ збільшується: $t := t + \Delta t$. Вся процедура повторюється спочатку.

Даний метод має точність $O^2(h)$, тобто на порядок вище, ніж метод Ейлера, при збільшенні числа обчислень усього в 2 рази.

На мал. 14.1 показано, який буде помилка $\varepsilon$ (розбіжність між реальним й обчисленим теоретичним значенням), якщо крок робиться за значенням похідної, обчисленої в крапці $i$, як це робиться в методі Ейлера. *Ця помилка може бути досить велика!*

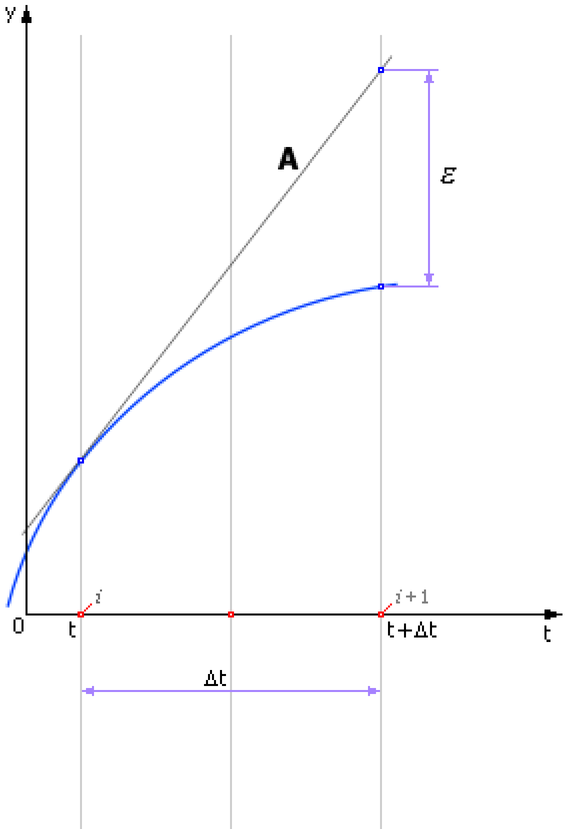


Рис. 14.1. Рух реальної й розрахункової системи
по методу Ейлера й розбіжність між ними (помилка)

На мал. 14.2 показано, як за значенням похідної, обчисленої в крапці $i$, робиться полшага до крапки $t + \Delta t/2$ (напрямок похідної показаний лінією **A**). І в крапці $t + \Delta t/2$ обчислюють нову похідну. Дотична в крапці $t + \Delta t/2$ буде інший — лінія **B**. Її нахил дорівнює похідній у крапці $t + \Delta t/2$.

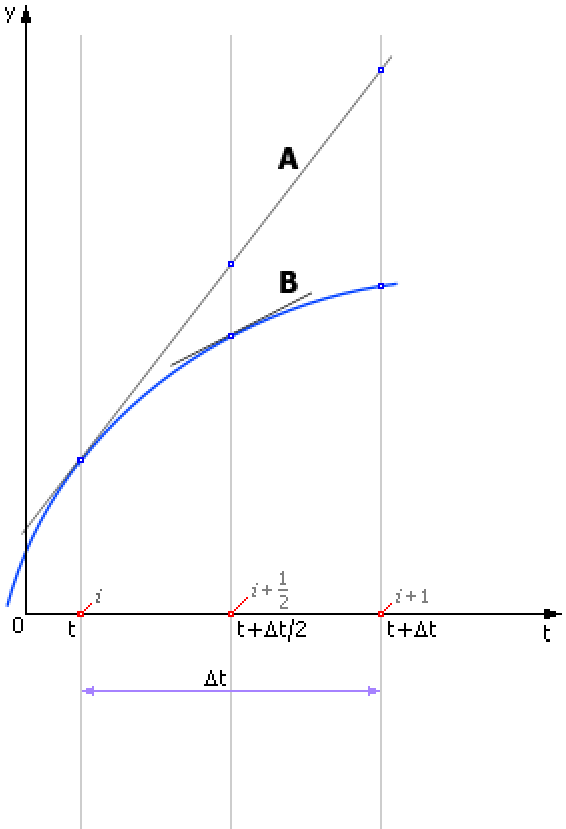


Рис. 14.2. Уточнення значення похідній усередині кроку розрахунку

Далі переносять лінію **B** обернено в крапку $t$. Це відповідає тому, що із крапки $t$ знову робиться, — але вже повний, — крок $\Delta t$ до крапки $t + \Delta t$ по напрямку, що відповідає лінії **C** (мал. 14.3). Лінія **C** паралельна **B**. Тобто значення похідної в крапці $t$ береться штучно рівним похідній у крапці $t + \Delta t/2$. Помилка розрахунку (див. $\varepsilon_{1)}$ у багатьох випадках при цьому зменшується.

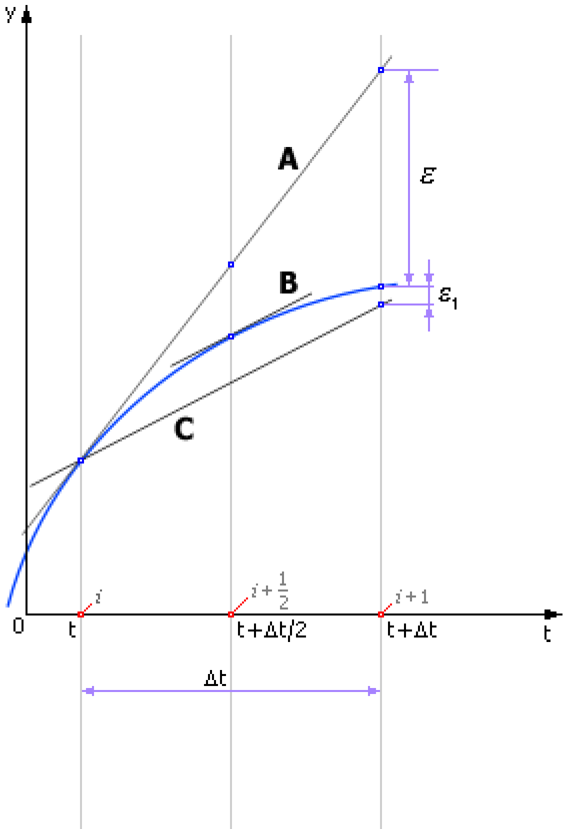


Рис. 14.3. Рух реальної системи й системи, розрахованої модифікованим методом Ейлера, і розбіжність між ними (помилка). На малюнку для порівняння показаний результат, обчислений по методу Ейлера

Існує інший варіант модифікованого методу Ейлера, коли похідну для того, щоб зробити крок із крапки $i$, беруть не в $i$-*ої* крапці й не в $i + 1/2$, а як середнє арифметичне двох похідних: похідній у крапці $i$ (напрямок похідної показаний на мал. 14.4 лінією **A**) і похідній у крапці $i + 1$ (напрямок похідної показаний лінією **B**). Напрямок «середньої» похідної показано лінією **C**.

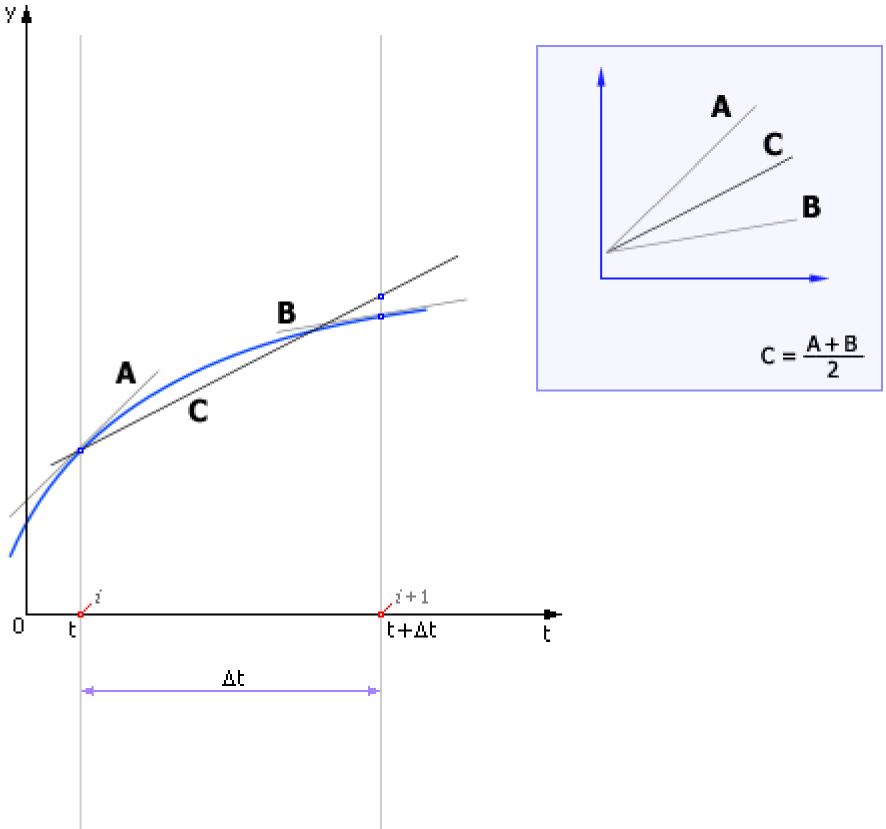


Рис. 14.4. Розрахунок руху системи за середнім значенням похідної на кроці