Лекція 15.
Метод Рунге-Кутти

Метод Рунге-Кутти використають для розрахунку стандартних моделей досить часто, тому що при невеликому об'ємі обчислень він має точність методу $O^4(h)$.

Для побудови різницевої схеми інтегрування скористаємося розкладанням функції

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\, y(x)),\ 0 < x \le T,\ y(0) = y_0 \qquad (1)$$

у ряд Тейлора:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + \ldots$$

Замінимо другу похідну в цьому розкладанні виразенням

$$y''(x_k) = (y'(x_k))' = f'(x_k,\, y(x_k)) \approx \frac{f(\tilde{x},\, \tilde{y}) - f(x_k,\, y(x_k))}{\Delta x}$$

де

$$\tilde{x} = x_k + \Delta x,\ \tilde{y} = y(x_k + \Delta x)$$

Причому Δx підбирається з умови досягнення найбільшої точності записаного виразення. Для подальших викладень зробимо заміну величини «y з тильдою» розкладанням у ряд Тейлора:

$$\tilde{y} = y(x_k + \Delta x) = y(x_k) + y'(x_k)\Delta x + \ldots$$

Для вихідного рівняння (1) побудуємо обчислювальну схему:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k,\, y_k)\cdot h + \frac{h^2}{2\,\Delta x}\cdot\left(f(x_k + \Delta x,\ y_k + y_k'\Delta x) - f(x_k,\, y_k)\right)$$

яку перетворимо до виду:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\cdot\left[\left(1 - \frac{h}{2\,\Delta x}\right)\cdot f(x_k,\, y_k) + \frac{h}{2\,\Delta x} f(x_k + \Delta x,\, y_k + y_k'\Delta x)\right] = \\ &= y_k + h\cdot\left[\left(1 - \frac{h}{2\,\Delta x}\right)\cdot f(x_k,\, y_k) + \frac{h}{2\,\Delta x} f\left(x_k + \frac{\Delta x}{h}h,\, y_k + f(x_k,\, y_k)\frac{\Delta x}{h}h\right)\right] \end{aligned}$$

Уведемо наступні позначення:

$$\alpha = \frac{h}{2\,\Delta x},\ \beta = 1 - \frac{h}{2\,\Delta x},\ \gamma = \frac{\Delta x}{h},\ \delta = f(x_k,\, y_k)\frac{\Delta x}{h}$$

Ці позначення дозволяють записати попереднє виразення у формі:

Очевидно, що всі уведені коефіцієнти залежать від величини Δx і можуть бути визначені через коефіцієнт α, що у цьому випадку відіграє роль параметра:

Остаточно схема Рунге-Кутти приймає вид:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \left[(1-\alpha) \cdot f(x_k, y_k) + \alpha \cdot f(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y_k + f(x_k, y_k)\frac{h}{2\alpha})\right]$$

Та ж схема у формі різницевого аналога рівняння (1):

При $\alpha = 0$ одержуємо як окремий випадок уже відому схему Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k, y_k\right)$$

При $\alpha = 1$:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k)\right)$$

При $\alpha = 1$ проведення розрахунків на черговому кроці інтегрування можна розглядати як послідовність нижченаведених операцій.

1. Обчислюється вираження, що представляє собою півкрок інтегрування за схемою Ейлера, тобто визначається наближене значення шуканої функції в крапці $x_k + h/2$:

2. Для тієї ж проміжної крапки перебуває наближене значення похідної:

$$y'_{k+1/2} = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+1/2}\right)$$

3. Визначається уточнене значення функції в кінцевій крапці всього кроку, причому за схемою Эйлера з обчисленим на попередньому кроці значенням похідній:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1/2}$$

Геометричні побудови (див. мал. 15.1) показують, що одержуване в такій послідовності рішення лежить «ближче» до щирого, чим обчислює по схемі Эйлера, тобто варто очікувати більше високої точності рішення, одержуваного методом Рунге-Кутти. Раніше ми назвали цю схему «модифікованим методом Ейлера».

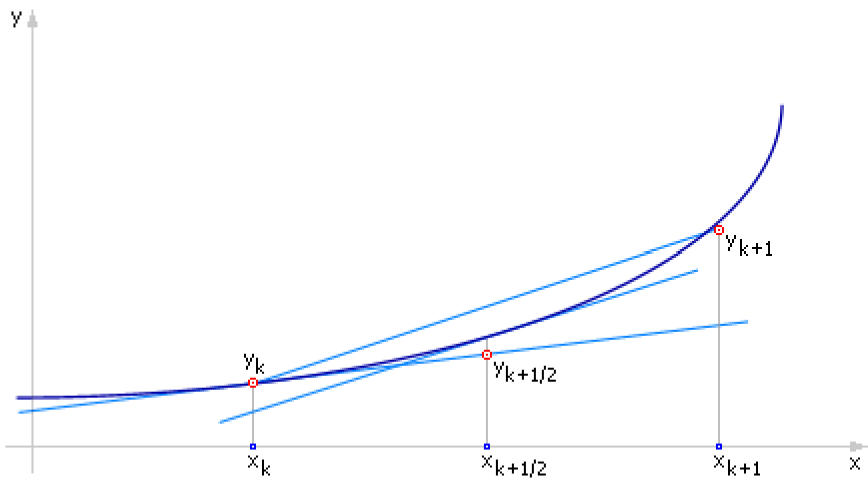

Рис. 15.1. Ілюстрація розрахунку на кроці методом Рунге-Кутти
при значенні параметра α = 1

Тепер розглянемо схему при $\alpha = 0.5$ (геометрична інтерпретація результату наведена на мал. 15.2).

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + h \cdot f(x_k, y_k)) \right]$$

1. Виконується повний крок методу Ейлера з метою визначення наближеного значення шуканої функції на кінці відрізка інтегрування:

$$\hat{y}_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k, y_k\right)$$

2. Для цієї ж крапки обчислюється наближене значення похідної:

$$y'_{k+1} = f\left(x_k + h, \hat{y}_{k+1}\right)$$

3. Перебуває середнє значення двох похідних, певних на кінцях відрізка:

$$y'_{k+1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left[y'_k + y'_{k+1} \right]$$

4. Обчислюється значення шуканої функції в кінцевій крапці всього кроку за схемою Эйлера з усередненим значенням похідної:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1/2}$$

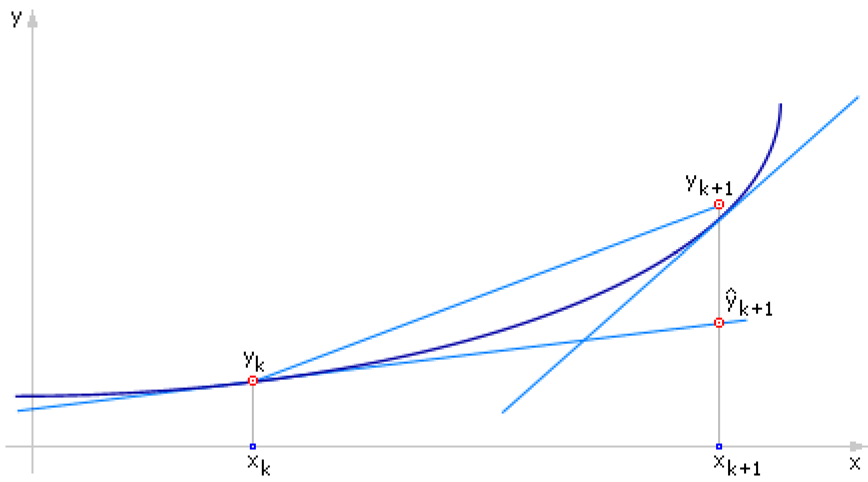

Рис. 15.2. Ілюстрація розрахунку на кроці методом Рунге-Кутти при значенні параметра α = 0.5

Іноді, що виходить вираження, називають схемою (методом) Эйлера-Коши. Геометрично зрозуміло, що одержуваний зазначеним способом результат також повинен бути «ближче» до щирого рішення, чим одержуваний за схемою Эйлера.

Приклад. Вирішити рівняння $dy/dx = -y$, $y(0) = 1$ методом Рунге-Кутти.

Оскільки права частина диференціального рівняння має вигляд: $f(x, y) = -y$, схема методу при $\alpha = 0.5$ представляється в такий спосіб:

$$y'_k = f(x_k, y_k) = -y_k$$

$$\hat{y}_{k+1} = y_k - h \cdot y_k = y_k \cdot (1 - h)$$

$$y'_{k+1} = f(x_k + h, \hat{y}_{k+1}) = -y_k \cdot (1 - \mathrm{h})$$

$$y'_{k+1/2} = \frac{y'_k + y'_{k+1}}{2} = -\frac{y'_k}{2} \cdot (2 - h)$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1/2} = y_k - y_k \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(2 - h\right) = y_k \frac{(h-1)^2 + 1}{2}$$

Побудуємо послідовність значень шуканої функції:

$$y_0 = y(0) = 1$$

$$y_1 = y_0 \frac{(h-1)^2 + 1}{2} = \frac{(h-1)^2 + 1}{2}$$

$$y_2 = y_1 \frac{(h-1)^2+1}{2} = \left[\frac{(h-1)^2+1}{2}\right]^2$$

$$y_3 = y_2 \frac{(h-1)^2+1}{2} = \left[\frac{(h-1)^2+1}{2}\right]^3$$

$$\ldots$$

$$y_n = \left[\frac{(h-1)^2+1}{2}\right]^n$$

Результаты одержуваного *чисельного* рішення для значення аргументу $x = 10$ при різних кроках інтегрування наведені в табл. 15.1. Три вірні значущі цифри отримані для кроку $h = 0.01$.

Таблиця 15.1.

Результати чисельного рішення y_n методом Рунге-Кутти другого порядку диференціального рівняння $y' = -y$ з початковою умовою $y(0) = 1$

Величина кроку h	0.5	0.25	0.1	0.01	0. 001	0. 0001
Число кроків n	20	40	100	1000	10 000	100 000
$\mathbf{y_n \cdot 10^4}$	0. 827181	0. 514756	0. 462229	0. 454076	0. 454000	0. 453999

Оцінимо погрішність апроксимації рівняння (1) різницевою схемою методу Рунге-Кутти. Підставляємо точне рішення в різницевий аналог вихідного диференціального рівняння й обчислюємо нев'язання:

Підставимо розкладання функцій

$$f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y(x_k) + \frac{h}{2\alpha} f(x_k, y(x_k))\right) =$$
$$= f(x_k, y(x_k)) + \frac{h}{2\alpha} \cdot \left[\frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k, y(x_k))}{\partial y} f(x_k, y(x_k))\right] + \ldots$$

в отримане вираження:

$$\psi_k = \frac{y(x_k) + y'(x_k)\cdot h + y''(x_k)\cdot \frac{h^2}{2} + K - y(x_k)}{h} - (1-\alpha) f(x_k,\ y(x_k)) -$$

$$-\alpha\cdot\left\{ f(x_k,\ y(x_k)) + \frac{h}{2\,\alpha}\cdot\left[\frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial y} f(x_k,\ y(x_k))\right] + \ldots \right\} =$$

$$= y'(x_k) + y''(x_k)\cdot\frac{h}{2} - f(x_k,\ y(x_k)) + \alpha\cdot f(x_k,\ y(x_k)) - \alpha\cdot f(x_k,\ y(x_k)) -$$

$$-\frac{h}{2}\cdot\left[\frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial y} f(x_k,\ y(x_k))\right] + O(h^2) =$$

$$= y'(x_k) - f(x_k,\ y(x_k)) + \frac{h}{2}\cdot\left[y''(x_k) - \frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial x} - \frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial y} f(x_k,\ y(x_k))\right] + O(h^2)$$

З огляду на рівняння (1), а також вираження для похідної

$$y''(x_k) = (y'(x_k))' = (f(x_k,\ y(x_k)))' = \frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k,\ y(x_k))}{\partial y} f(x_k,\ y(x_k))$$

остаточно одержуємо, що $\psi_k = O(h^2)$, тобто метод Рунге-Кутти, незалежно від значення параметра α, має *другий* порядок апроксимації.

Методи Рунге-Кутти третього й четвертого порядків

Розглянемо дві різні схеми Рунге-Кутти, призначені для чисельного рішення звичайних диференціальних рівнянь першого порядку й апроксимації, що мають третій порядок:

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k,\ y_k) \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} K_1) \\ K_3 = f(x_k + h,\ y_k - h K_1 + 2h K_2) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\cdot(K_1 + 4K_2 + K_3) \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1 = f(x_k,\ y_k) \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{3},\ y_k + \frac{h}{3} K_1) \\ K_3 = f(x_k + \frac{2h}{3},\ y_k + \frac{2h}{3} K_2) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{4}\cdot(K_1 + 3K_3) \end{cases}$$

І дві схеми Рунге-Кутти, що мають *четвертий* порядок апроксимації:

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k,\ y_k) \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} K_1) \\ K_3 = f(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} K_2) \\ K_4 = f(x_k + h,\ y_k + h K_3) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} \cdot (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1 = f(x_k,\ y_k) \\ K_2 = f(x_k + \frac{h}{4},\ y_k + \frac{h}{4} K_1) \\ K_3 = f(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} K_2) \\ K_4 = f(x_k + h,\ y_k + h K_1 - 2h K_2 + 2h K_3) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} \cdot (K_1 + 4K_3 + K_4) \end{cases}$$

Приклад. Вирішити методом Рунге-Кутти четвертого порядку рівняння $dy/dx = -y$, $y(0) = 1$.

Відповідно до наведеного вище співвідношеннями визначаємо коефіцієнти:

$$K_1 = -y_k$$

$$K_2 = -\left(y_k + \frac{h}{2} K_1\right) = -y_k \cdot \left(1 - \frac{h}{2}\right)$$

$$K_3 = -\left(y_k + \frac{h}{2} K_2\right) = -y_k \cdot \left(1 - \frac{h}{2} \cdot \left(1 - \frac{h}{2}\right)\right)$$

$$K_4 = -\left(y_k + h K_3\right) = -y_k \cdot \left[1 - h \cdot \left(1 - \frac{h}{2} \cdot \left(1 - \frac{h}{2}\right)\right)\right]$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} \cdot \left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) = y_k \cdot \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right)$$

Побудуємо послідовність значень шуканої функції:

$$y_0 = y(0) = 1$$

$$y_1 = y_0 \cdot \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right) = 1 \cdot \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right)$$

$$y_2 = y_1 \cdot \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right) = 1 \cdot \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right)^2$$

$$y_3 = y_2 \cdot \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right) = 1 \cdot \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right)^3$$

…

$$y_n = \left(1 + \frac{h^4 - 4h^3 + 12h^2 - 24h}{24}\right)^n$$

Результати одержуваного чисельного рішення для значення аргументу $x = 10$ при різних кроках інтегрування наведені в табл. 15.2. Три вірні значущі цифри отримані для кроку $h = 0.25$.

Таблиця 15.2.

Результати чисельного рішення y_n методом Рунге-Кутти четвертого порядку диференціального рівняння $y' = -y$ з початковою умовою $y(0) = 1$

Величина кроку h	0.5	0.25	0.1	0.01	0. 001	0. 0001
Число кроків n	20	40	100	1000	10 000	100 000
$\mathbf{y_n \cdot 10^4}$	0. 457608	0. 454181	0. 454003	0. 453999	0. 453999	0. 453999

Порівняння таблиць 15.1 й 15.2 з рішеннями однієї й тієї ж задачі дозволяє зробити висновок, що *більше високий ступінь апроксимації* диференціального рівняння різницевим аналогом дозволяє одержувати *більше точне рішення* при більшому кроці й, отже, меншому числі кроків, тобто приводить до *зниження необхідних ресурсів* ЕОМ.

На сьогоднішній день для грубого розрахунку обчислення виробляються методом Эйлера, для точного розрахунку - методом Рунге-Кутти.