Лекція 16.
Методи прогнозу й корекції (ітераційні методи)

Вивчені нами раніше методи володіли однією важливою особливістю — кожному методу відповідає звичайно певний клас точності, що ми позначали як O^i. Наприклад, метод Ейлера мав перший клас точності O^1. Це означало, що зі зменшенням кроку в 10 разів (на порядок) точність результату підвищується теж в 10 разів (на один порядок). Метод Рунге-Кутти володіє 4 порядком точності — O^4, при зменшенні кроку в 10 разів, результат поліпшується в 10 000 разів. Оскільки цей метод у порівнянні з методом Ейлера використає всього в 4 рази більше обчислень, то використання його більш вигідно. На сьогоднішній день відомі методи до 8 порядку точності (наприклад, метод Prince Dortmund), хоча одночасно варто мати на увазі, що написання алгоритмів для них - задача досить важка. Достоїнством всіх цих алгоритмів є те, що об'єм обчислень для них заздалегідь відомий.

Якщо потрібно досягти ***ЛЮБОЮ*** точності на кроці, то варто використати методи прогнозу й корекції. Цей підхід полягає в тому, що розрахунок траєкторії, заданої рівнянням, на кожному кроці відбувається багаторазово. А саме, спочатку відбувається розрахунок наближеного значення функції на кінці кроку якою-небудь простою формулою (наприклад, методом Ейлера), далі в цій крапці обчислюється похідна, і розрахунок відбувається знову з початкової крапки на кроці, але з уточненим значенням похідної. Остання операція — уточнення похідної й значення функції на кінці кроку — відбувається ***БАГАТОРАЗОВО НА КОЖНОМУ КРОЦІ***, тобто доти, поки обчислені значення (функції й похідній наприкінці кроку) не перестануть мінятися або будуть мінятися вже незначно, менше ніж задана заздалегідь величина ε. Тільки тоді можна сказати, що точність ε досягнута.

Итак, **за рахунок ітераційної процедури на кожному окремому кроці** можна досягти кожний, наперед заданій точності ε. За таке достоїнство методу доводиться платити: на жаль, неможливо сказати заздалегідь, скільки ітерацій буде потрібно для досягнення на кроці заданої точності ε. Тому такі методи не можна, наприклад, використати в системах реального часу.

Розглянемо для приклада два методи із цього класу. Як і раніше завдання полягає в знаходженні функції $y(t)$ з диференціального рівняння $dy/dt = f(y, x, t)$ або множини функцій із системи таких рівнянь.

Метод Ейлера з ітераціями

1) формула, Що Пророкує, обчислює (прогнозує) значення функції на правому кінці кроку: $_{yk\,+}\ 1 = yk + \cdot\ fk\ ?t$.

2) Розраховується похідна в крапці $k + 1$ підстановкою y у вихідне рівняння в $k + 1$ крапці: $f_{k+1} = f(t + \Delta t, y_{k+1})$.

3) Уточнююча формула, використовуючи старе значення похідній (із кроку 1) і уточнене із кроку 2, дає уточнене значення y_{k+1}: $y_{k+1} = y_k + (f_k + f_{k+1}) \cdot \Delta t/2$. Тут же виробляється підрахунок ітерацій лічильником i: $i := i + 1$.

4) Перевірка точності: $|y_{k+1}{}^{i\text{-я ітерація}} - y_{k+1}{}^{(i+1)\text{-я итерация}}| \leq \varepsilon$. Якщо умова виконана й точність ε досягнуто, то переходимо на наступний крок 5), інакше здійснюється перехід на крок 2) і процес уточнення повторюється з новими значеннями y й f, причому їхнє старе значення береться з попередньої ітерації.

5) Підготовка до нового кроку: зміна лічильника часу t на величину Δt і зміна номера кроку k:
$t := t + \Delta t$
$k := k + 1$.

6) Перевірка закінчення розрахунку: $t \leq T$. Якщо умова виконується, розрахунок триває для наступної крапки, перехід на 1), інакше - кінець.

Метод Мілна

1) По формулі, що пророкує, обчислюється грубе *значення* у на правому кінці інтервалу: y_{k+1}: $y_{k+1} = y_{k-3} + 4/3 \cdot (2 \cdot f_k - f_{k-1} + 2 \cdot f_{k-2}) \cdot \Delta t$.

2) Розраховується похідна в $k + 1$ крапці: $f_{k+1} = f(t + \Delta t, y_{k+1})$.

3) Знову розраховується y_{k+1} по уточненій формулі, використовуючи вже нове значення похідної в крапці $k + 1$: $y_{k+1} = y_{k-1} + 1/3 \cdot (f_{k+1} + 4 \cdot f_k + f_{k-1}) \cdot \Delta t$.

4) Розраховується похідна в $k + 1$ крапці з обліком знову обчисленого більше точного значення y_{k+1}: $f_{k+1} = f(t + \Delta t, y_{k+1})$. Тут же виробляється підрахунок ітерацій лічильником i:
$i := i + 1$.

5) Перевірка точності: $|y_{k+1}{}^{i\text{-я ітерація}} - y_{k+1}{}^{(i+1)\text{-я итерация}}| \leq \varepsilon$. Якщо умова виконана, і точність ε досягнуто, то переходимо на наступний крок 6, інакше здійснюється перехід на крок 3 і процес уточнення повторюється з новими значеннями y й f, причому їхнє старе значення береться з попередньої ітерації.

6) Підготовка до нового кроку: зміна лічильника часу t, зміна номера кроку k:
$t := t + \Delta t$
$k := k + 1$.

7) Перевірка закінчення розрахунку: $t \leq T$. Якщо умова виконується, то розрахунок триває для наступної крапки, і здійснюється перехід на крок 1, інакше - кінець.