Лекція 24.

Моделювання випадкової величини із заданим законом розподілу

Більшою інформативністю, у порівнянні з такими статистичними характеристиками як математичне очікування, дисперсія, для інженера володіє закон розподілу ймовірності випадкової величини X. Представимо, що X приймає випадкові значення з деякого діапазону. Наприклад, X — діаметр вито чуваної деталі. Діаметр може відхилятися від запланованого ідеального значення під впливом різних факторів, які не можна врахувати, тому він є випадковою слабко передбачуваною величиною. Але в результаті тривалого спостереження за випускають деталями, що, можна відзначити, скільки деталей з 1000 мали діаметр X_1 (позначимо N_{X1}), скільки деталей мали діаметр X_2 (позначимо N_{X2}) і так далі. У підсумку можна побудувати гістограму частості діаметрів, відкладаючи для X_1 величину $N_{X1}/1000$, для X_2 величину $N_{X2}/1000$ і так далі. (Зверніть увагу, якщо бути точним, N_{X1} — це число деталей, діаметр яких не просто дорівнює X_1, а перебуває в діапазоні від $X_1 - \Delta/2$ до $X_1 + \Delta/2$, де $\Delta = X_1 - X_2$). Важливо, що сума всіх частостей буде дорівнює 1 (сумарна площа гістограми незмінна). Якщо X міняється безупинно, досвідів проведено дуже багато, то в межі $N \to \infty$ гістограма перетворюється в графік розподілу ймовірності випадкової величини. На мал. 24.1, а показаний приклад гістограми дискретного розподілу, а на мал. 24.1, б показаний варіант безперервного розподілу випадкової величини.

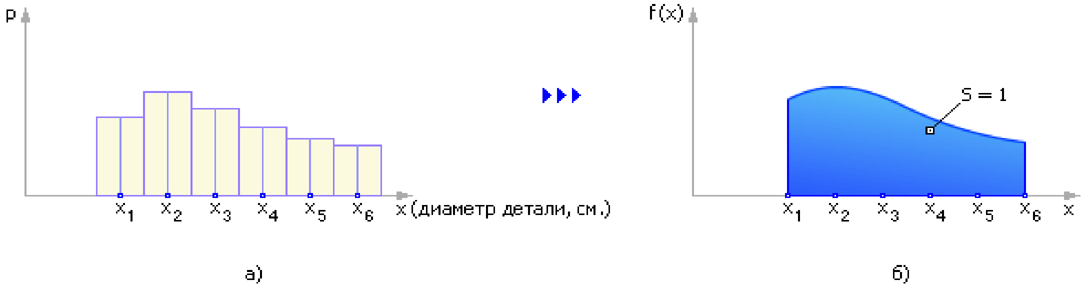

Рис. 24.1. Порівняння дискретного й безперервного законів розподілу випадкової величини

У нашому прикладі закон розподілу ймовірності випадкової величини показує наскільки ймовірно те або інше значення діаметра деталей, що випускають. Випадковою величиною є діаметр деталі.

У виробництві й техніку часто такі закони розподіли задані за умовою задачі. Наша задача зараз полягає в тому, щоб навчитися імітувати появу конкретних випадкових подій відповідно до ймовірностей такого розподілу.

Метод східчастої апроксимації

Тому що закони розподілу ймовірності подій можуть бути різної форми, а не тільки рівноймовірними, то необхідно вміти перетворювати рівномірний ГВЧ у генератор випадкових чисел із заданим довільним законом розподілу. На рис. 21.3 це відповідає двом першим блокам методу статистичного моделювання. Для цього безперервний закон розподілу ймовірності події дискретизуємо, перетворимо в дискретний.

Позначимо: h_i — висота *i-го* стовпця, $f(x)$ — розподіл імовірності (показує наскільки ймовірно деяку подію x). Значення h_i операцією нормування необхідно перевести в одиниці ймовірності появи значень x з інтервалу $x_i < x \leq x_{i+1}$: $P_i = h_i/(h_1 + h_2 + \ldots + h_i + \ldots + h_n)$...

Операція нормування забезпечує суму ймовірностей всіх n подій рівну 1:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

На мал. 24.2 показані графічно перехід від довільного безперервного закону розподілу до дискретного (мал. 24.2, а), відображення одержуваних імовірностей на інтервал $r_{pp}[0; 1]$ і генерація випадкових подій з використанням еталонного рівномірно розподіленого ГВЧ (мал. 24.2, б).

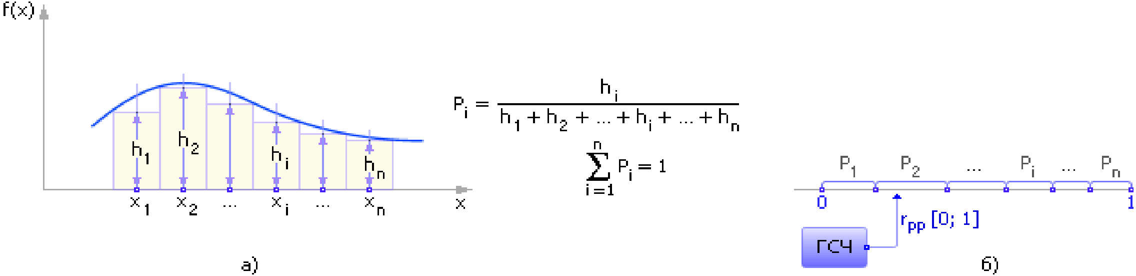

Рис. 24.2. Ілюстрація методу східчастої апроксимації

Помітимо, що усередині інтервалу $x_i < x \leq x_{i+1}$ значення x тепер не помітне, однаково. Метод огрубляет споконвічну постановку задачі, переходячи від безперервного закону розподілу до дискретного. Тому варто враховувати кількість розбивок n з умов точності подання.

На мал. 24.3 показаний фрагмент алгоритму, що реалізує описаний метод. Алгоритм генерує випадкове число, рівномірно розподілене від 0 до 1. Потім, порівнюючи границі відрізків, розташованих на інтервалі від 0 до 1, що представляють собою ймовірності P випадання тих або інших випадкових величин X, визначає в циклі, яке з випадкових подій i у результаті цього випадає.

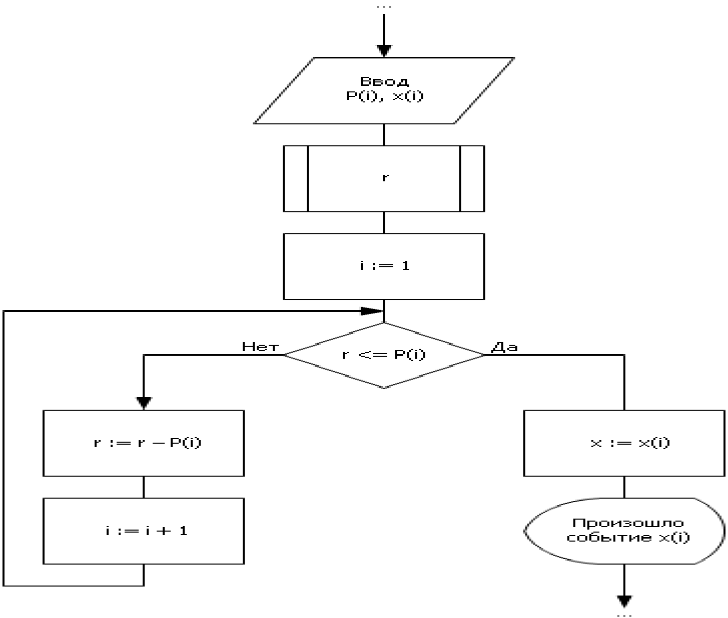

Рис. 24.3. Блок-схема алгоритму, що реалізує метод східчастої апроксимації

Помітимо, що усередині інтервалу $x_i < x \leq x_{i+1}$ значення x тепер не помітне, однаково. Метод загрублює споконвічну постановку задачі, переходячи від безперервного закону розподілу до дискретного. Тому варто враховувати кількість розбивок n з умов точності подання.

Метод усікання

Метод використається у випадку, коли функція задана аналітично (у вигляді формули). Графік функції вписують у прямокутник (див. мал. 24.4). На вісь *Y* подають випадкове рівномірно розподілене число із ГСЧ. На вісь *X* подають випадкове рівномірно розподілене число із ГСЧ. Якщо крапка в перетинанні цих двох координат лежить нижче кривої щільності ймовірності, то подія *X* відбулося, інакше немає.

Недоліком методу є те, що те крапки, які виявилися вище кривої розподіли щільності ймовірності, відкидаються як непотрібні, і час, витрачений на їхнє обчислення, виявляється даремним. Метод застосуємо тільки для аналітичних функцій щільності ймовірності.

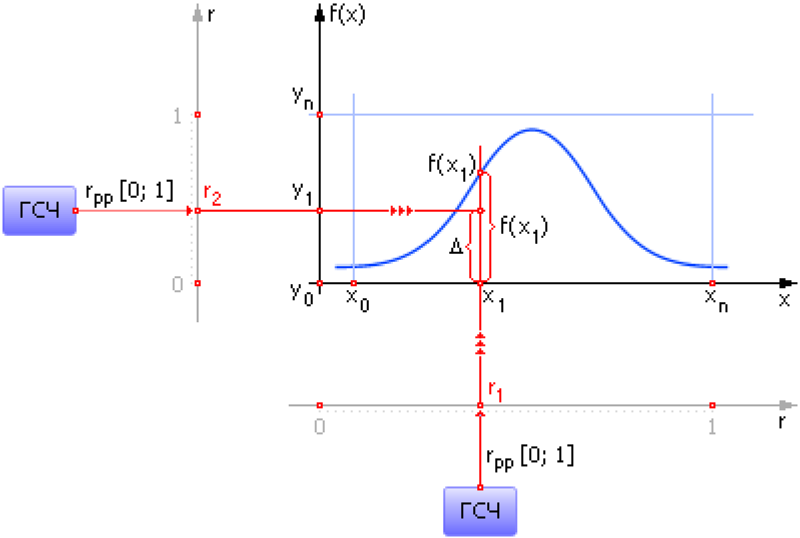

Рис. 24.4. Ілюстрація методу усікання

На мал. 24.5 показаний алгоритм, що реалізує метод усікання. У циклі генерується два випадкових числа з діапазону від 0 до 1. Числа масштабуються в шкалу X й Y і перевіряється влучення крапки зі згенерованими координатами під графік заданої функції $Y = f(X)$. Якщо крапка перебуває під графіком функції, то подія X відбулося з імовірністю Y, інакше крапка відкидається.

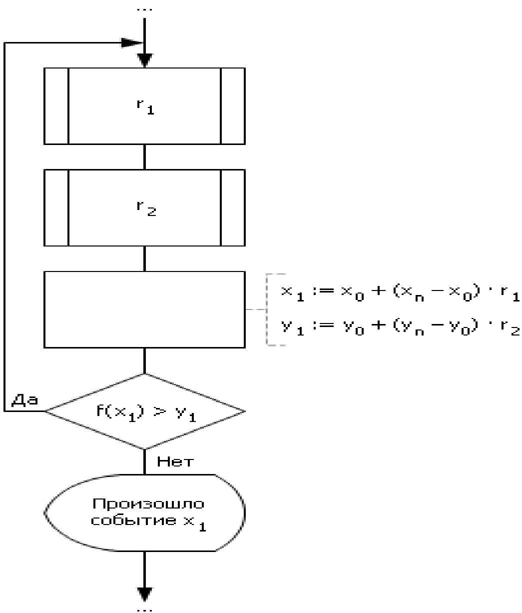

Рис. 24.5. Блок-схема алгоритму, що реалізує метод усікання

Метод узяття зворотної функції

Допустимо, що нам заданий інтегральний закон розподілу ймовірності $F(x)$, де $f(x)$ — функція щільності ймовірності й

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Тоді досить розіграти випадкове число, рівномірно розподілене в інтервалі від 0 до 1. Оскільки функція F теж змінюється в даному інтервалі, то випадкова подія x можна визначити узяттям зворотної функції за графіком або аналітично: $x = F^{-1}(r)$. Тут r — число, генероване еталонним ГВЧ в інтервалі від 0 до 1, x_1 — згенерована в підсумку випадкова величина. Графічно суть методу зображена на мал. 24.6.

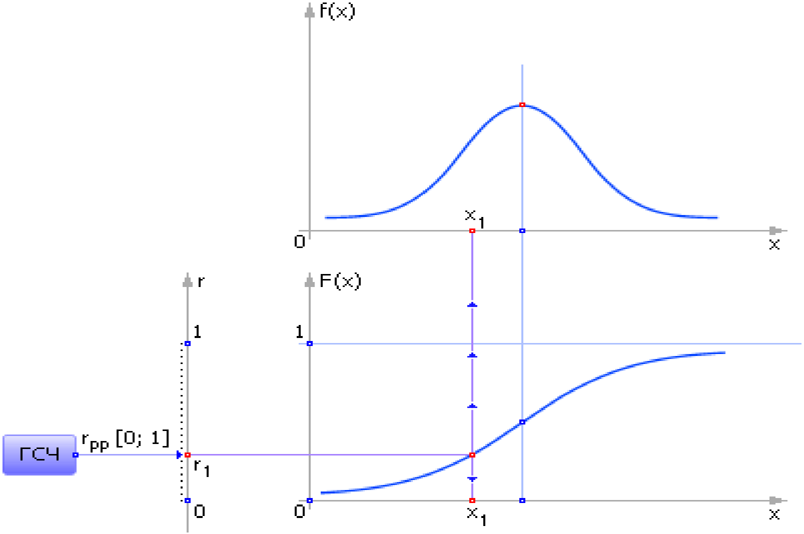

Рис. 24.6. Ілюстрація методу зворотної функції для генерації випадкових подій x, значення яких розподілені безупинно. На малюнку показані графіки щільності ймовірності й інтегральної щільності ймовірності від x

Даним методом особливо зручно користуватися у випадку, коли інтегральний закон розподілу ймовірності задане аналітично й можливо аналітичне узяття зворотної функції від нього, як це й показано на наступному прикладі.

Приклад 1. Приймемо до розгляду експонентний закон розподілу ймовірності випадкових подій $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$. Тоді інтегральний закон розподілу щільності ймовірності має вигляд: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Тому що r й F у даному методі передбачаються аналогічними й розташовані в одному інтервалі, те, заміняючи F на випадкове число r, маємо: $r = 1 - e^{-\lambda x}$.

Виражаючи шукану величину x із цього вираження (тобто, обертаючи функцію **exp()**), одержуємо: $x = -1/\lambda \cdot \ln(1 - r)$.

Тому що в статичному змісті $(1 - r)$ і r — це одне й теж, те $x = -1/\lambda \cdot \ln(r)$.

На мал. 24.7 показаний фрагмент алгоритму, що реалізує метод зворотної функції для експонентного закону.

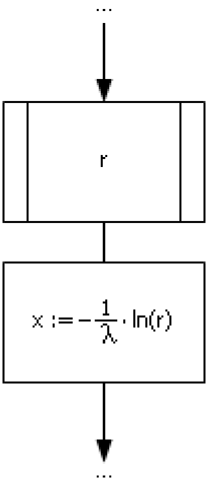

Рис. 24.7. Фрагмент блок-схеми алгоритму, що
реалізує метод зворотної функції
для експонентного закону