Лекція 28.

Потік випадкових подій

У попередніх лекціях ми навчилися імітувати настання випадкових подій. Тобто ми можемо розіграти — **яке** з можливих подій наступить й **у якій** кількості. Щоб це визначити, треба знати статистичні характеристики появи подій, наприклад, такою величиною може бути ймовірність появи події, або розподіл імовірностей різних подій, якщо типів цих подій нескінченно багато.

Але часто ще важливо знать, **коли** конкретно наступить та або інша подія в часі.

Коли подій багато й вони випливають один за одним, то вони утворять *потік*. Помітимо, що події при цьому повинні бути однорідними, тобто схожими чимсь один на одного. Наприклад, поява водіїв на АЗС, що бажають заправити свій автомобіль. Тобто, однорідні події утворять якийсь ряд. При цьому вважається, що статистична характеристика цього явища (інтенсивність потоку подій) задана. Інтенсивність потоку подій указує, скільки *в середньому* відбувається таких подій за одиницю часу. Але коли саме відбудеться кожна конкретна подія треба визначити методами моделювання. Важливо, що, коли ми згенеруємо, наприклад, за 200 годин 1000 подій, їхня кількість буде дорівнює приблизно величині середньої інтенсивності появи подій 1000/200 = 5 подій у годину, що є статистичною величиною, що характеризує цей потік у цілому.

Інтенсивность потоку в деякому змісті є математичним очікуванням кількості подій в одиницю часу. Але реально може так виявитися, що в одна година з'явиться 4 події, в іншій - 6, хоча в середньому виходить 5 подій у годину, тому однієї величини для характеристики потоку недостатньо. Другою величиною, що характеризує наскільки великий розкид подій щодо математичного очікування, є, як і раніше, дисперсія. Властиво саме ця величина визначає випадковість появи події, слабку передбачуваність моменту його появи. Про цю величину ми розповімо в наступній лекції.

Отже.

Потік подій — це послідовність однорідних подій, що наступають одне за іншим у випадкові проміжки часу. На осі часу ці події виглядають як показане на мал. 28.1.

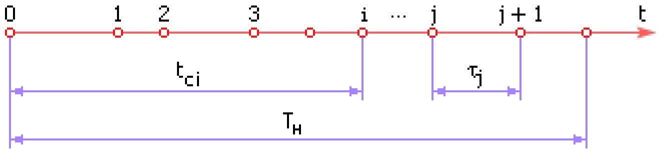

Рис. 28.1. Потік випадкових подій

τ_j — інтервал між подіями (випадкова величина);

t_{ci} — момент здійснення *і-го* події (відраховує від $t = 0$);

$T_н$ — час спостереження.

Прикладом потоку подій можуть служити послідовність моментів торкання злітної смуги літаками, що прилітають в аеропорт.

Інтенсивність потоку λ — це середнє число подій в одиницю часу. Інтенсивність потоку можна розрахувати експериментально по формулі: $\lambda = N/T_н$, де N — число подій, що відбулися за час спостереження $T_н$.

Якщо інтервал між подіями τ_j дорівнює константі або визначений якою-небудь формулою у вигляді: $t_j = f(t_{j-1})$, то потік називається **детермінованим**. Інакше потік називається **випадковим**.

Випадкові потоки бувають:

- ординарні: імовірність одночасної появи двох і більше подій дорівнює нулю;
- стаціонарні: частота появи подій $\lambda(t) = \mathrm{const}(t)$;
- без післядії: імовірність появи випадкової події не залежить від моменту здійснення попередніх подій.

Пуасонівський потік

За еталон потоку в моделюванні прийнято брати Пуасонівський потік.

Пуасонівський потік - це ординарний потік без післядії.

Як раніше було зазначено, імовірність того, що за інтервал часу $(t_0, t_0 + \tau)$ відбудеться m подій, визначається із закону Пуасона:

$$P_m = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$$

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) \cdot dt$$

де a — параметр Пуасона.

Якщо $\lambda(t) = \text{const}(t)$, те це стаціонарний потік Пуасона (найпростіший). У цьому випадку $a = \lambda \cdot t$. Якщо $\lambda = \text{var}(t)$, те це нестаціонарний потік Пуасона.

Для найпростішого потоку ймовірність появи m подій за час τ дорівнює:

$$P_m = \frac{(\lambda \cdot \tau)^m \cdot e^{-\lambda \tau}}{m!}$$

Імовірність непояви (тобто жодного, $m = 0$) події за час τ дорівнює:

$$P_0 = \frac{(\lambda \cdot \tau)^0 \cdot e^{-\lambda \tau}}{0!} = e^{-\lambda \tau}$$

Рис. 28.2 ілюструє залежність P_0 від часу. Очевидно, що чим більше час спостереження, тим імовірність непояви жодного події менше. Крім того, ніж більше значення λ, тим крутіше йде графік, тобто швидше убуває ймовірність. Це відповідає тому, що якщо інтенсивність появи подій велика, то ймовірність непояви події швидко зменшується згодом спостереження.

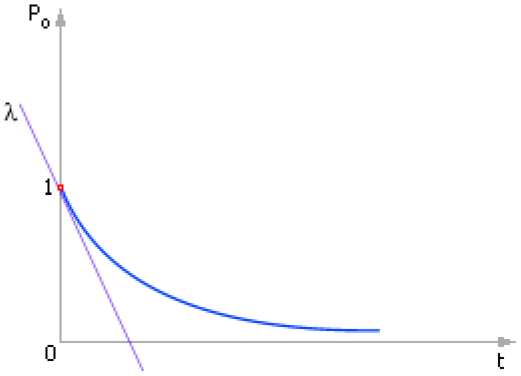

Рис. 28.2. Графік імовірності непояви жодного події в часі

Імовірність появи хоча б однієї події ($P_{ХБ1С}$) обчислюється так:

$$P_{ХБ1С} = 1 - P_0 = 1 - e^{-\lambda \tau} \qquad (*)$$

тому що $P_{ХБ1С} + P_0 = 1$ (або з'явиться хоча б одна подія, або не з'явиться жодного, — іншого не дано).

Із графіка на мал. 28.3 видно, що ймовірність появи хоча б однієї події прагне згодом до одиниці, тобто при відповідному тривалому спостереженні події таке обов'язково рано або пізно відбудеться. Ніж довше ми спостерігаємо за подією (чим більше t), тим більше ймовірність того, що подія відбудеться — графік функції монотонно зростає.

Чем більше інтенсивність появи події (чим більше λ), тим швидше наступає ця подія, і тем швидше функція прагне до одиниці. На графіку параметр λ представлений крутістю лінії (нахил дотичній).

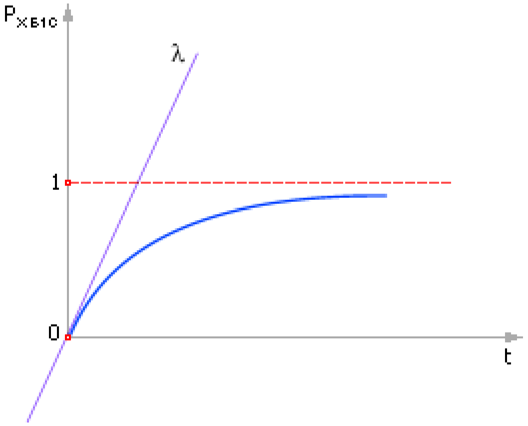

Рис. 28.3. Графік імовірності появи хоча б однієї події згодом

Якщо збільшувати λ, те при спостереженні за подією протягом того самого часу τ, імовірність настання події зростає (див. мал. 28.4). Очевидно, що графік виходить із 0, тому що якщо час спостереження нескінченно мало, те ймовірність того, що подія відбудеться за цей час, незначна. І навпаки, якщо час спостереження нескінченно велике, то подія обов'язково відбудеться хоча б один раз, виходить, графік прагне до значення ймовірності рівної 1.

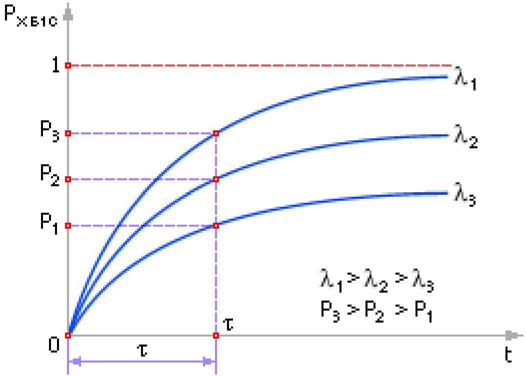

Рис. 28.4. Вплив величини інтенсивності потоку на ймовірність появи події протягом заданого інтервалу часу τ

Вивчаючи закон, можна визначити, що: $m_x = 1/\lambda$, $\sigma = 1/\lambda$, тобто для найпростішого потоку $m_x = \sigma$. Рівність математичного очікування середньоквадратичному відхиленню означає, що даний потік — потік без післядії. Дисперсія (точніше, середньоквадратичне відхилення) такого потоку велика. Фізично це означає, що час появи події (відстань між подіями) погано передбачувано, випадково, перебуває в інтервалі $m_x - \sigma < \tau_j < m_x + \sigma$. Хоча ясно, що в середньому воно зразково дорівнює: $\tau_j = m_x = T_\text{н}/N$. Подія може з'явитися в будь-який момент часу, але в межах розкиду цього моменту τ_j відносно m_x на $[-\sigma; +\sigma]$ (величину післядії).

На мал. 28.5 показані можливі положення події 2 щодо осі часу при заданому σ. У цьому випадку говорять, що перша подія не впливає на друге, друге на третє й так далі, тобто післядія відсутнє.

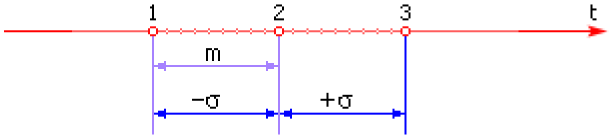

Рис. 28.5. Ілюстрація впливу величини σ на положення події на тимчасовій шкалі

За змістом P дорівнює r (див. лекцію 23), тому, виражаючи τ з формули **(*)**, остаточно для визначення інтервалів між двома випадковими подіями маємо:

$$\boldsymbol{\tau = -1/\lambda \cdot \mathrm{Ln}(r)},$$

де r — рівномірно розподілене від 0 до 1 випадкове число, що беруть із ГСЧ, τ — інтервал між випадковими подіями (випадкова величина τ_j).

Приклад 1. Розглянемо потік виробів, що приходять на технологічну операцію. Виробу приходять випадковим образом — у середньому вісім штук за добу (інтенсивність потоку $\lambda = 8/24$ [од/година]).

Необхідно промоделювати цей процес протягом $T_н = 100$ годин. $m = 1/\lambda = 24/8 = 3$, тобто в середньому одна деталь за третя година.

Помітимо, що $\sigma = 3$. На мал. 28.6 представлений алгоритм, що генерує потік випадкових подій.

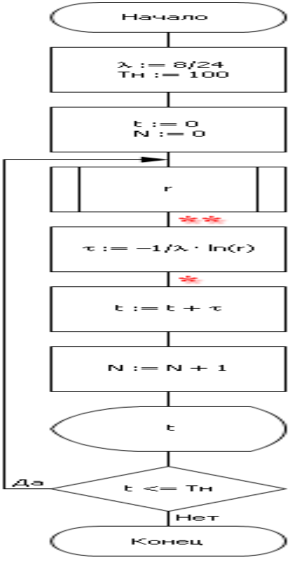

Рис. 28.6. Алгоритм, що генерує потік випадкових подій у заданим λ

На мал. 28.7 показаний результат роботи алгоритму — моменти часу, коли деталі приходили на операцію. Як видно, усього за період $T_н = 100$ виробничий вузол обробив $N = 33$ виробу. Якщо запустити алгоритм знову, то N може виявитися рівним, наприклад, 34, 35 або 32. Але в середньому, за K прогонів алгоритму N буде дорівнює 33.33... … Якщо порахувати відстані між подіями t_{ci} і моментами часу, обумовленими як $3 \cdot i$, то в середньому величина буде дорівнює $\sigma = 3$.

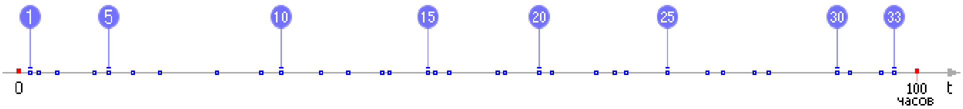

Рис. 28.7. Ілюстрація роботи алгоритму, що генерує потік випадкових подій

Моделювання неординарних потоків подій

Якщо відомо, що потік не є ординарним, то необхідно моделювати крім моменту виникнення події ще й число подій, що могло з'явитися в цей момент. Наприклад, вагони на залізничну станцію прибувають у складі поїзда у випадкові моменти часу (ординарний потік поїздів). Але при цьому в складі поїзда може бути різне (випадкове) кількість вагонів. У цьому випадку про потік вагонів говорять як про потік неординарних подій.

Допустимо, що $M_k = 10$, $\sigma = 4$ (тобто, у середньому в 68 випадках з 100 приходить від 6 до 14 вагонів у складі поїзда) і їхнє число розподілене за нормальним законом. У місце, відзначене (*) у попередньому алгоритмі (див. мал. 28.6), потрібно вставити фрагмент, показаний на мал. 28.8.

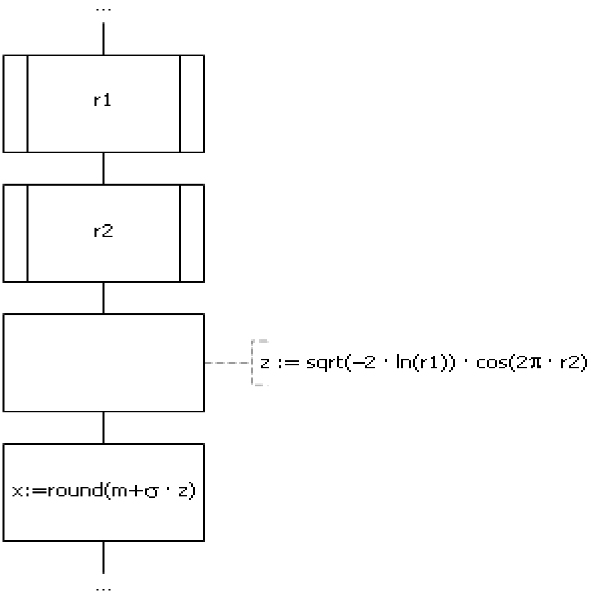

Рис. 28.8. Фрагмент алгоритму, що реалізує неординарний потік випадкових подій

Приклад 2. Дуже корисним у виробництві є рішення наступної задачі. Яке середній час добового простою встаткування технологічного вузла, якщо вузол обробляє кожен виріб випадковий час, заданий інтенсивністю потоку випадкових подій λ_2? При цьому експериментально встановлено, що привозять вироби на обробку теж у випадкові моменти часу, задані потоком λ_1 партіями по 8 штук, причому розмір партії коливається випадково за нормальним законом з $m = 8$, $\sigma = 2$ (див. лекцію 25). До початку моделювання $T = 0$ на складі виробів не було. Необхідно промоделювати цей процес протягом $T_{\text{н}} = 100$ годин.

На мал. 28.9 представлений алгоритм, що генерує випадковим образом потік приходу партій виробів на обробку й потік випадкових подій — виходу партій виробів з обробки.

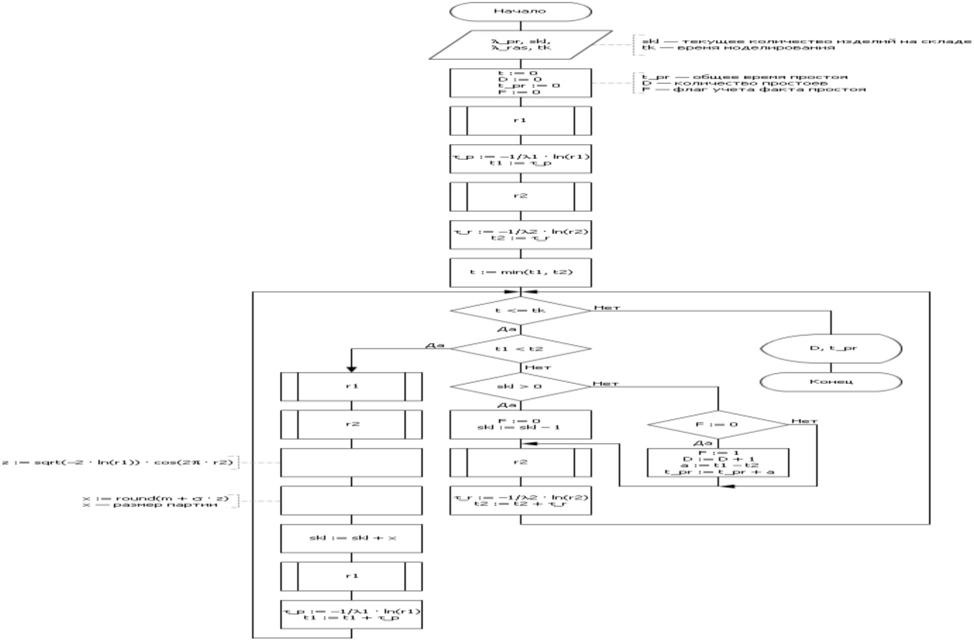

Рис. 28.9. Алгоритм імітації обробки партій виробів
з урахуванням випадковості подій, що відбуваються

На мал. 28.10 показаний результат роботи алгоритму — моменти часу, коли деталі приходили на операцію, і моменти часу, коли деталі залишали операцію. На третій лінії видно, скільки деталей стояло в черзі на обробку (лежало на складі вузла) у різні моменти часу.

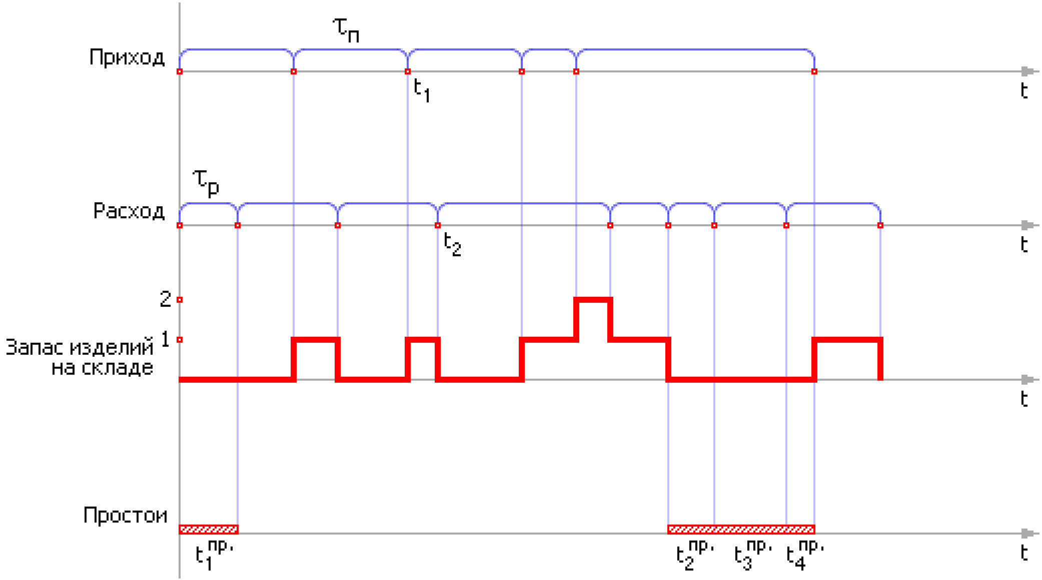

Рис. 28.10. Діаграма, що ілюструє рух виробів через вузол обробки

Відзначаючи для обробного вузла часи, коли він простоював чекаючи чергової деталі (див. на мал. 28.10 ділянки часу, виділені червоним штрихуванням), ми можемо порахувати сумарний час простоїв вузла за увесь час спостереження, а потім розрахувати середній час простою протягом доби. Для даної реалізації цей час обчислюється так:

$$T_{\text{пр.}}^{\text{порівн.}} = 24 \cdot (t_1^{\text{ін.}} + t_2^{\text{ін.}} + t_3^{\text{ін.}} + t_4^{\text{ін.}} + \ldots + t_N^{\text{пр.}})/T_{\text{н}}.$$

Завдання 1. Міняючи величину σ, установите залежність $T_{\text{пр.}}^{\text{ср.}}(\sigma)$. Задаючи вартість за простій вузла 100 євро/година, установите річні втрати підприємства від нерегулярності в роботі постачальників. Запропонуєте формулювання пункту договору підприємства з постачальниками «Величина штрафу за затримку поставки виробів».

Завдання 2. Міняючи величину початкового заповнення складу, установите, як зміняться річні втрати підприємства від нерегулярності в роботі постачальників залежно від прийнятої на підприємстві величини запасів.

Моделювання нестаціонарних потоків подій

У ряді випадків інтенсивність потоку може мінятися згодом $\lambda(t)$. Такий потік називається нестаціонарним. Наприклад, середня кількість за годину машин швидкої допомоги, що залишають станцію по викликах населення великого міста, протягом доби може бути різним. Відомо, наприклад, що найбільша кількість викликів падає на інтервали з 23 до 01 години ночі й з 05 до 07 ранку, тоді як в інші годинники воно вдвічі менше (див. мал. 28.11).

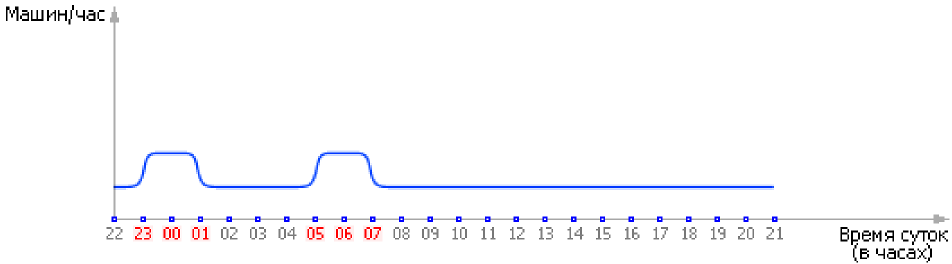

Рис. 28.11. Діаграма зміни інтенсивності потоку випадкових подій згодом

У цьому випадку розподіл $\lambda(t)$ може бути задано або графіком, або формулою, або таблицею. А в алгоритмі, показаному на мал. 28.6, у місце, позначене (**), потрібно буде вставити фрагмент, показаний на мал. 28.12.

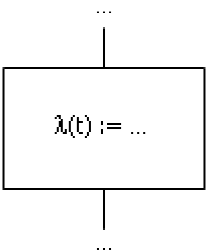

Рис. 28.12. Фрагмент алгоритму, що реалізує генерацію випадкових подій у випадку нестаціонарного потоку