Лекція 29.

Потоки з післядією (потоки Ерланга)

Як ми раніше відзначили, інтенсивність потоку в деякому змісті є математичним очікуванням кількості подій в одиницю часу (зворотна до неї величина вказує на середній час між подіями). Другою величиною, що характеризує наскільки великий розкид у часі приходу подій щодо математичного очікування, є дисперсія.

Допустимо, події в потоці випливають точно одне за іншим кожні 12 хвилин без відхилень. Інтенсивність такого потоку буде дорівнює 5 подій у годину. Але якщо події будуть іти випадково, наприклад, 12 ± 2 хвилини, те й вони в середньому дадуть також 5 подій у годину. Наприклад, за 200 годин відбудеться 1000 подій, величина інтенсивності $1000/200 = 5$ подій у годину. Тому по даній характеристиці потоки не можна відрізнити друг від друга. Але очевидно, що другий потік все-таки буде більше випадковим, чим перший. Тим більше, якщо в потоці події будуть випливати один за одним 12 ± 10 хвилин.

Перший потік ми назвемо детермінованим, регулярним, другий і третій — випадковими. Причому міра випадковості зі збільшенням дисперсії (розкиду величини інтервалу між подіями) буде зростати. У першому потоці дисперсія дорівнює нулю. Даний факт проілюстрований на мал. 29.1.

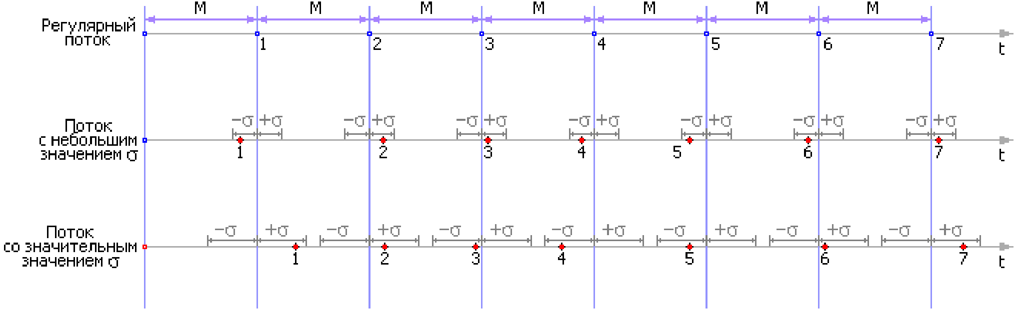

Рис. 29.1. Ілюстрація регулярного й випадкового потоків

Властиво саме дисперсія визначає випадковість появи події, слабку передбачуваність моменту його появи. Важливо вміти управляти цією величиною при моделюванні випадкових потоків. Якщо пророчити кожна наступна подія важко, то потік - без післядії (або з малою післядією, зв'язок між подіями відсутній, події випадкові), якщо потік детермінований, то післядія велика - кожної подія практично пророкує момент появи наступного.

Потік Ерланга *k-го* порядку — це потік випадкових подій, що виходить, якщо в найпростішому (див. лекцію 28) випадковому потоці зберегти кожне *k-і* подія, а інші відкинути (див. мал. 29.2). Порядок потоку - міра післядії потоку. Тобто зворотною величиною до мері випадковості потоку є його порядок.

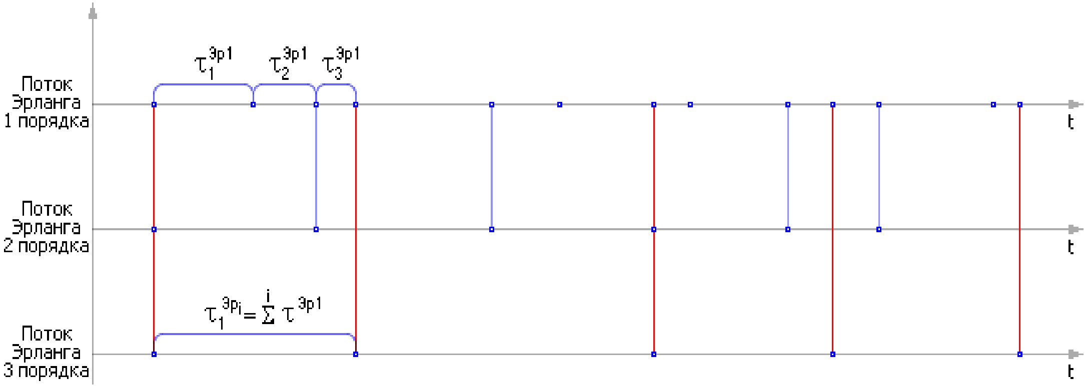

Рис. 29.2. Ілюстрація методу одержання потоків Ерланга

Просівання подій починає приводити до того, що між крапками з'являється післядія, детермінація, що тим вище, чим більше *k*. Зі збільшенням *k* крапки лягають на вісь часу усе більш рівномірно, розкид їх зменшується, регулярність збільшується.

Засновано це на тім простому й раніше вивченому нами факті, що сума випадкових величин є величина невипадкова (центральна гранична теорема - див. лекцію 25). Чим більше ми складемо випадкових величин, тим логічнішим буде результат (їхня сума).

Очевидно, що

$$\tau^{Эр_k} = \sum_{i=1}^{k} \tau_i^{Эр_1}$$

— інтервал між подіями в потоці Ерланга *k-го* порядку.

Щільність імовірності розподілу інтервалів між випадковими подіями в потоці Ерланга *k-го* порядку:

$$f(T_{эк}) = \frac{\lambda \cdot (\lambda \cdot t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$\lambda_k = \lambda/k$ — інтенсивність потоку Ерланга *k-го* порядку, де λ — інтенсивність найпростішого потоку Пуассона, а λ_k інтенсивність просіяного k раз потоку, тобто в k раз менше.

Параметри закону Ерланга обчислюються по формулах: $M_k = 1/\lambda_k$, $\sigma_k = 1/\mathrm{sqrt}(k)/\lambda_k$,

Зверніть увагу, що в потоці Ерланга $M \neq \sigma$, тобто в потоках з післядією рівність M й σ неможливо.

Более того, при $k \to \infty$ подія відбувається строго в розміряний час, тому що $\sigma \to 0$.

Зрівняйте:
Потік Ерланга 1-го порядку: $m = \sigma_1$ — потік без післядії;
Потік Ерланга *i-го* порядку: $m \neq \sigma_2$, при цьому $(\sigma_2 > 0)$ і $(\sigma_1 > \sigma_{2})$ розкид зменшується, післядія збільшується;
Потік Ерланга ∞-го порядку: $m \neq \sigma = 0$ — регулярний потік.

Із цього треба, що порядок потоку Ерланга - є міра післядії потоку.

Приклад. Розглянемо приклад виходу з ладу лампочок на опорі вуличного висвітлення. Приймемо час спостереження 100 років. З паспортних даних на ці вироби відомо, що середній час роботи виробу на відмову становить 1.5 року; середньоквадратичне відхилення - 0.5 року.

Тобто, задано: $M_k = 1.5$, $\sigma_k = 0.5$.

Оскільки $M_k \neq \sigma_k$, те $k \neq 1$, тобто ми маємо справу з потоком з післядією. Інтенсивність цього потоку $\lambda_k = 1/M_k = 1/1.5 = 0.67$. Обчислена інтенсивність потоку говорить нам про те, що протягом року в середньому перегоряє 0.67 лампочки або 67 лампочок за 100 років.

Тоді як $\sigma_k = 1/\mathrm{sqrt}(k)/\lambda_k$, і дорівнює 0.5, то обчислимо порядок потоку Ерланга: $k = 1/\sigma^{2/}\lambda_k{}^2 = 1/0.52/0.67^2 \approx 9$.

Обчислимо інтенсивність потоку, що породжує, *Пуассона ?* $= \lambda_k \cdot k = 0.67 \cdot 9 = 6$.

На мал. 29.3 представлений приклад алгоритму, що реалізує моделювання описаного процесу. Зверніть увагу, що береться кожна дев'ята подія, це забезпечує досить високу детермінованість потоку (тобто малу дисперсію $\sigma_k = 0.5$).

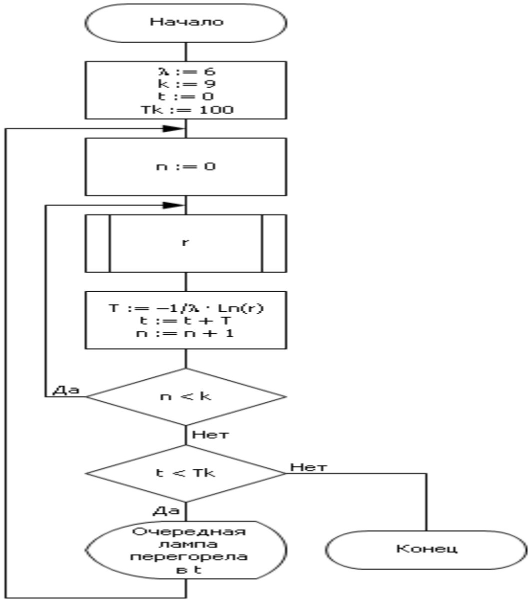

Рис. 29.3. Блок-схема алгоритму моделювання появи випадкових подій у вигляді потоку Ерланга