Лекція 33.

Моделювання марковських випадкових процесів

Дуже зручно описувати поява випадкових подій у вигляді ймовірностей переходів з одного стану системи в інше, тому що при цьому вважається, що, перейшовши в один зі станів, система не повинна далі враховувати обставини того, як вона потрапила в цей стан.

Випадковий процес називається марковським процесом (або процесом без післядії), якщо для кожного моменту часу t імовірність будь-якого стану системи в майбутньому залежить тільки від її стану в сьогоденні й не залежить від того, як система прийшла в цей стан.

Отже, марковський процес зручно задавати графом переходів зі стану в стан. Ми розглянемо два варіанти опису марковських процесів — **з дискретним і безперервним часом**.

У першому випадку перехід з одного стану в інше відбувається в заздалегідь відомі моменти часу - такти (1, 2, 3, 4, ...). Перехід здійснюється на кожному такті, тобто дослідника цікавить тільки послідовність станів, що проходить випадковий процес у своєму розвитку, і не цікавить, коли конкретно відбувався кожний з переходів.

У другому випадку дослідника цікавить і ланцюжок меняющих друг друга станів, і моменти часу, у які відбувалися такі переходи.

І ще. Якщо ймовірність переходу не залежить від часу, то марковський ланцюг називають однорідною.

Марковський процес із дискретним часом

Отже, модель марковського процесу представимо у вигляді графа, у якому стану (вершини) зв'язані між собою зв'язками (переходами з *i-го* стану в *j-i* стан), див. мал. 33.1.

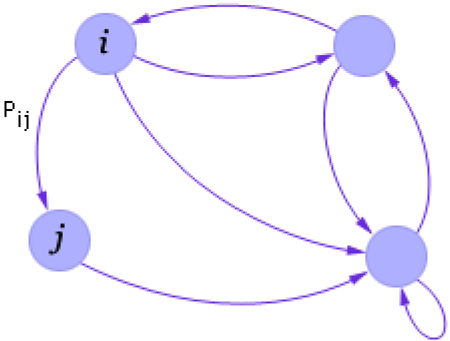
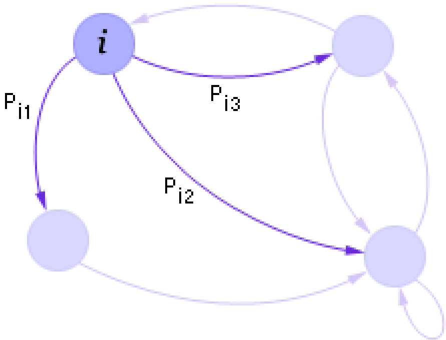


Рис. 33.1. Приклад графа переходів

Кожен перехід характеризується ймовірністю переходу P_{ij}. Імовірність P_{ij} показує, як часто після влучення в i-i стан здійснюється потім перехід в j-i стан. Звичайно, такі переходи відбуваються випадково, але якщо виміряти частоту переходів за досить великий час, то виявиться, що ця частота буде збігатися із заданою ймовірністю переходу.

Ясно, що в кожного стану сума ймовірностей всіх переходів (вихідних стрілок) з нього в інші стани повинна бути завжди дорівнює 1 (див. мал. 33.2).



$$P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} = 1$$

Рис. 33.2. Фрагмент графа переходів (переходи з і-го стани є повною групою випадкових подій)

Наприклад, повністю граф може виглядати так, як показано на мал. 33.3.

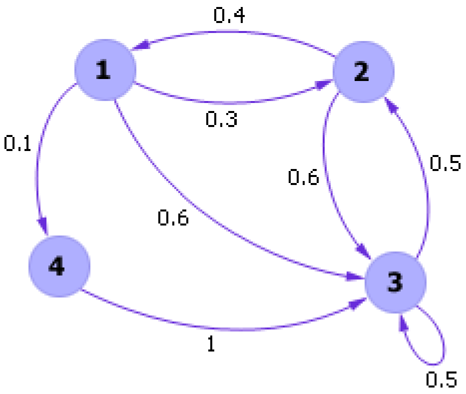


Рис. 33.3. Приклад марковського графа переходів

Реалізація марковського процесу (процес його моделювання) являє собою обчислення послідовності (ланцюга) переходів зі стану в стан (див. мал. 33.4). Ланцюг на мал. 33.4 є випадковою послідовністю й може мати також й інші варіанти реалізації.

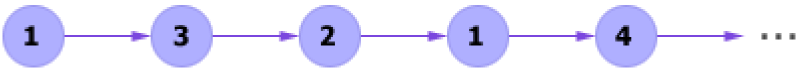


Рис. 33.4. Приклад марковського ланцюга, змодельованої по марковському графі, зображеному на мал. 33.3

Щоб визначити, у який новий стан перейде процес із поточного *i-го* стану, досить розбити інтервал [0; 1] на підінтервали величиною P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, … ($P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} + \ldots = 1$), см. мал. 33.5. Далі за допомогою ГВЧ треба одержати чергове рівномірно розподілене в інтервалі [0; 1] випадкове число r_{pp} і визначити, у який з інтервалів воно попадає (див. лекцію 23).

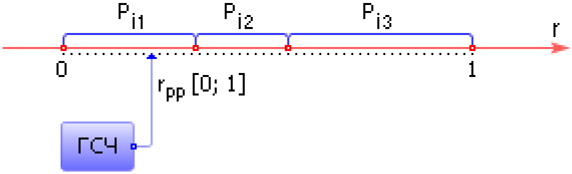


Рис. 33.5. Процес моделювання переходу з i-го стану марковського ланцюга в j-i з використанням генератора випадкових чисел

Після цього здійснюється перехід у стан, певний ГВЧ, і повтор описаної процедури для нового стану. Результатом роботи моделі є марковський ланцюг (див. мал. 33.4**).**

Приклад. Імітація стрілянини з гармати по меті. Для того, щоб проімітувати стрілянину з гармати по меті, побудуємо модель марковського випадкового процесу.

Визначимо наступні три стани: S_0 — ціль не ушкоджена; S_1 — ціль ушкоджена; S_2 — ціль зруйнована. Задамо вектор початкових імовірностей:

	$\mathbf{S_0}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$
$\mathbf{P_0}$	0.8	0.2	0

Значення P_0 для кожного зі станів показує, яка ймовірність кожного зі станів об'єкта до початку стрілянини.

Задамо матрицю переходу станів (див. табл. 33.1).

Таблиця 33.1.
Матриця ймовірностей переходу
дискретного марковського процесу

	В $\mathbf{S_0}$	В $\mathbf{S_1}$	В $\mathbf{S_2}$	**Сума ймовірностей переходів**
З $\mathbf{S_0}$	0.45	0.40	0.15	0.45 + 0.40 + 0.15 = 1
З $\mathbf{S_1}$	0	0.45	0.55	0 + 0.45 + 0.55 = 1
З $\mathbf{S_2}$	0	0	1	0 + 0 + 1 = 1

Матриця задає ймовірність переходу з кожного стану в кожне. Помітимо, що ймовірності задані так, що сума ймовірностей переходу з деякого стану в інші завжди дорівнює одиниці (кудись система повинна перейти обов'язково).

Наочно модель марковського процесу можна уявити собі у вигляді наступного графа (див. мал. 33.6).

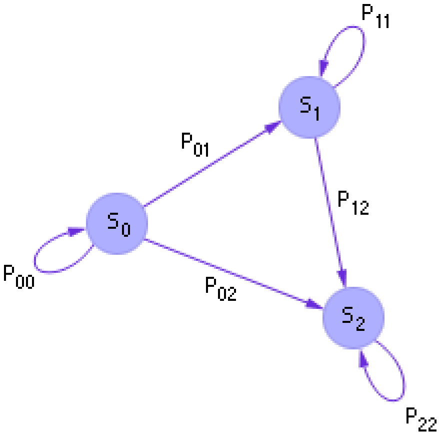


Рис. 33.6. Граф марковського процесу, що моделює стрілянину з гармати по цілі

Використовуючи модель і метод статистичного моделювання, спробуємо вирішити наступну задачу: визначити середня кількість снарядів, необхідне для повного руйнування мети.

Проімітуємо, використовуючи таблицю випадкових чисел, процес стрілянини. Нехай початковий стан буде S_0. Візьмемо послідовність із таблиці випадкових чисел: 0.31, 0.53, 0.23, 0.42, 0.63, 0.21, … (випадкові числа можна взяти, наприклад, із цієї таблиці).

0.31: ціль перебуває в стані S_0 і залишається в стані S_0, тому що $0 < \mathbf{0.31} < 0.45$;
0.53: ціль перебуває в стані S_0 і переходить у стан S_1, тому що $0.45 < \mathbf{0.53} < 0.45 + 0.40$;
0.23: ціль перебуває в стані S_1 і залишається в стані S_1, тому що $0 < \mathbf{0.23} < 0.45$;
0.42: ціль перебуває в стані S_1 і залишається в стані S_1, тому що $0 < \mathbf{0.42} < 0.45$;
0.63: ціль перебуває в стані S_1 і переходить у стан S_2, тому що $0.45 < \mathbf{0.63} < 0.45 + 0.55$.

Тому що досягнуто стан S_2 (далі ціль переходить із S_2 у стан S_2 з імовірністю 1), те ціль уражена. Для цього в даному експерименті треба було 5 снарядів.

На мал. 33.7 наведена тимчасова діаграма, що виходить під час описаного процесу моделювання. Діаграма показує, як у часі відбувається процес зміни станів. Такт моделювання для даного випадку має фіксовану величину. Нам важливий сам факт переходу (у який стан переходить система) і не важливо, коли це відбувається.

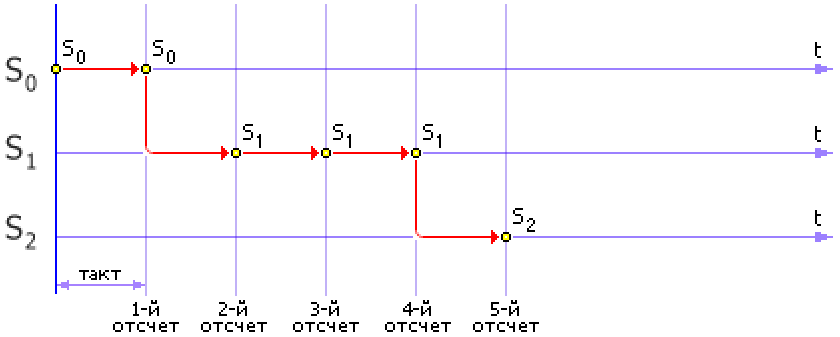


Рис. 33.7. Часова діаграма переходів
у марковському графі (приклад імітації)

Процедура знищення цілі зроблена за 5 тактів, тобто марковський ланцюг цієї реалізації виглядає в такий спосіб: $S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_2$. Звичайно, відповіддю задачі це число бути не може, тому що в різних реалізаціях вийдуть різні відповіді. А відповідь у задачі може бути тільки один.

Повторюючи дану імітацію, можна одержати, наприклад, ще такі реалізації (це залежить від того, які конкретно випадкові числа випадуть): 4 ($S_0—S_0—S_1—S_1—S_2$); 11 ($S_0—S_0—S_0—S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_1—S_1—S_1—S_2$); 5 ($S_1—S_1—S_1—S_1—S_1—S_{2)}$; 6 ($S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_1—S_2$); 4 ($S_1—S_1—S_1—S_1—S_2$); 6 ($S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_1—S_2$); 5 ($S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_2$). Усього знищено 8 цілей. Середнє число циклів у процедурі стрілянини склало: $(5 + 4 + 11 + 5 + 6 + 4 + 6 + 5)/8 = 5.75$ або, округляючи, 6. Саме стільки снарядів, у середньому, рекомендується мати в бойовому запасі гармати для знищення мети при таких імовірностях влучень.

Тепер варто визначити точність. Саме точність може нам показати, наскільки варто довіряти даній відповіді. Для цього простежимо, як сходиться послідовність випадкових (наближених) відповідей до правильного (точному) результату. Нагадаємо, що, відповідно до центральної граничної теореми (див. лекцію 25, лекцію 21), сума випадкових величин є величина невипадкова, тому для одержання статистично достовірної відповіді необхідно стежити за середнім числом снарядів, одержуваних у ряді випадкових реалізацій.

На першому етапі обчислень середня відповідь склала 5 снарядів, на другому етапі середня відповідь склала $(5 + 4)/2 = 4.5$ снаряди, на третьому — $(5 + 4 + 11)/3 = 6.7$. Далі ряд середніх величин, у міру нагромадження статистики, виглядає в такий спосіб: 6.3, 6.2, 5.8, 5.9, 5.8. Якщо зобразити цей ряд у вигляді графіка середньої величини випущених снарядів, необхідних для поразки мети, залежно від номера експерименту, то виявиться, що даний ряд сходиться до деякої величини, що й є відповіддю (див. мал. 33.8).

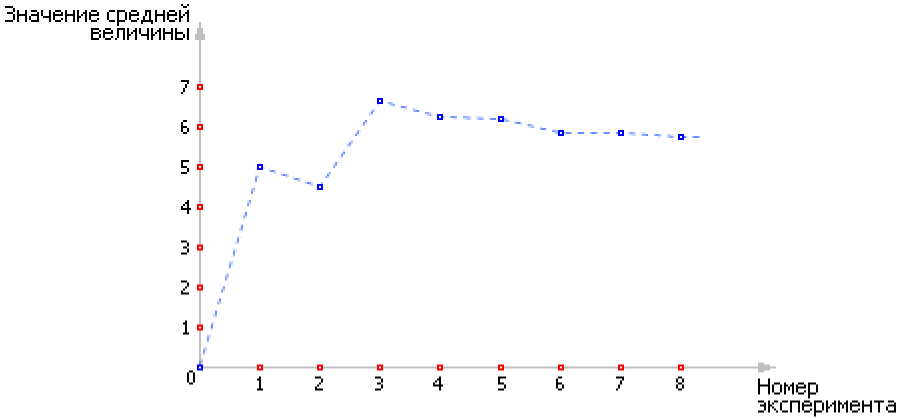


Рис. 33.8. Зміна середньої величини залежно від номера експерименту

Візуально ми можемо спостерігати, що графік «заспокоюється», розкид між поточною величиною, що обчислює, і її теоретичним значенням згодом зменшується, прагнучи до статистично точного результату. Тобто в деякий момент графік входить у деяку «трубку», розмір якої й визначає точність відповіді.

Алгоритм імітації буде мати такий вигляд (див. мал. 33.9).

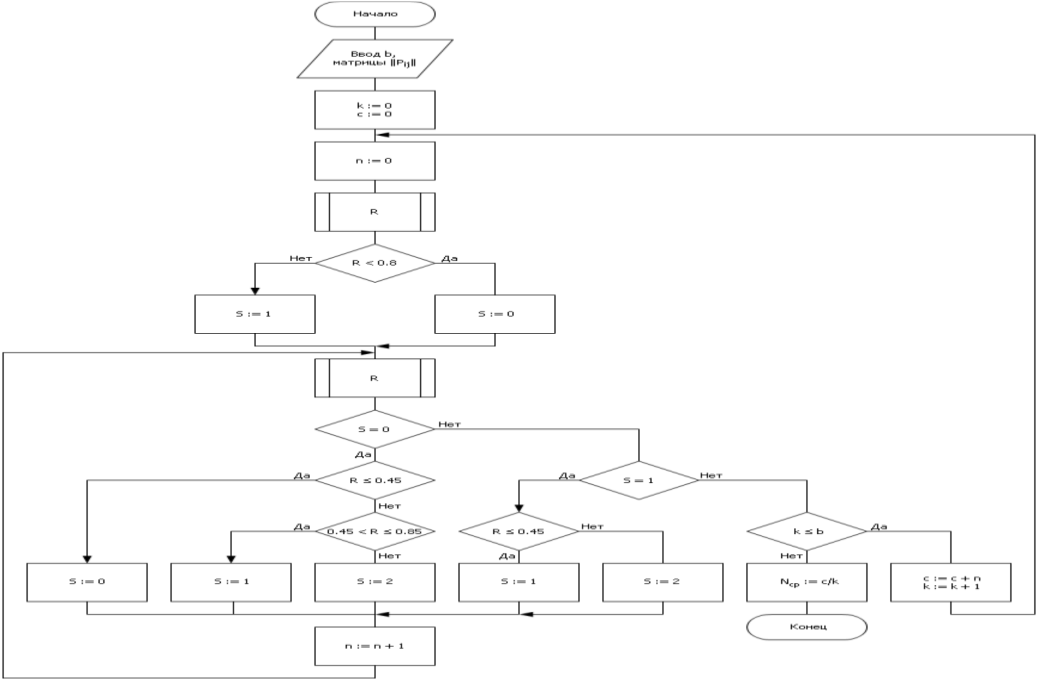


Рис. 33.9. Блок-схема імітації дискретного марковського процесу на прикладі стрілянини з гармати

Ще раз помітимо, що у вищерозглянутому випадку нам байдуже, у які моменти часу буде відбуватися перехід. Переходи йдуть такт за тактом. Якщо важливо вказати, у який саме момент часу відбудеться перехід, скільки часу система пробуде в кожному зі станів, потрібно застосувати модель із безперервним часом.

Марковські випадкові процеси з безперервним часом

Отже, знову модель марковського процесу представимо у вигляді графа, у якому стану (вершини) зв'язані між собою зв'язками (переходами з *i-го* стану в *j-i* стан), див. мал. 33.10.

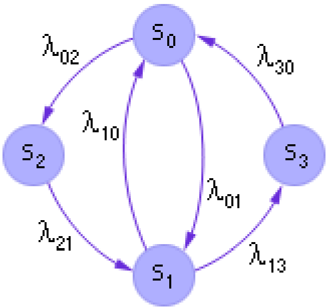


Рис. 33.10. Приклад графа марковського процесу з безперервним часом

Тепер кожен перехід характеризується щільністю ймовірності переходу λ_{ij}. По визначенню:

При цьому щільність розуміють як розподіл імовірності в часі.

Перехід з *і-го* стану в *j-і* відбувається у випадкові моменти часу, які визначаються інтенсивністю переходу λ_{ij}.

До інтенсивності переходів (тут це поняття збігається за змістом з розподілом щільності ймовірності за часом t) переходять, коли процес безперервний, тобто, розподілений у часі.

З інтенсивністю потоку (а переходи — це потік подій) ми вже навчилися працювати в лекції 28. Знаючи інтенсивність λ_{ij} появи подій, породжуваних потоком, можна зімітувати випадковий інтервал між двома подіями в цьому потоці.

де τ_{ij} — інтервал часу між знаходженням системи в *i-ом* й *j-ом* стані.

Далі, мабуть, система з будь-якого *i-го* стану може перейти в один з декількох станів j, $j + 1$, $j + 2$, …, пов'язаних з ним переходами λ_{ij}, λ_{ij+1}, λ_{ij+2}, …...

В *j-і* стан вона перейде через τ_{ij}; в ($j + 1$)-е стан вона перейде через τ_{ij+1}; в ($j + 2$)-е стан вона перейде через τ_{ij+2} і т.д.

Ясно, що система може перейти з *i-го* стану тільки в один із цих станів, причому в те, перехід у яке наступить раніше.

Тому з послідовності часів: τ_{ij}, τ_{ij+1}, τ_{ij+2} і т.д. треба вибрати мінімальне й визначити індекс j, що вказує, у який саме стан відбудеться перехід.

Приклад. Моделювання роботи верстата. Промоделюємо роботу верстата (див. мал. 33.10), що може перебувати в наступних станах: S_0 — верстат справний, вільний (простій); S_1 — верстат справний, зайнята (обробка); S_2 — верстат справний, заміна інструмента (переналагодження) $\lambda_{02} < \lambda_{21}$; S_3 — верстат несправний, іде ремонт $\lambda_{13} < \lambda_{30}$.

Задамо значення параметрів λ, використовуючи експериментальні дані, одержувані у виробничих умовах: λ_{01} — потік на обробку (без переналагодження); λ_{10} — потік обслуговування; λ_{13} — потік відмов устаткування; λ_{30} — потік відновлень.

Реалізація буде мати такий вигляд (див. мал. 33.11).

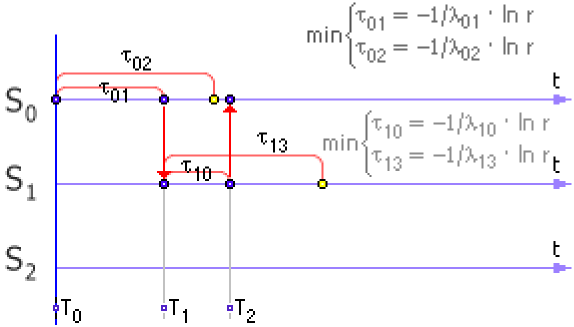


Рис. 33.11. Приклад моделювання безперервного марковського процесу з візуалізацією на часовій діаграмі (жовтими кольорами зазначені заборонені, синім — стани, що реалізувалися)

Зокрема, з мал. 33.11 видно, що ланцюг, що реалізувався, виглядає так: $_S0$-$_S1$-$_S0$…Переходи відбулися в наступні моменти часу: T_0—T_1—T_2—T_3—…,де $T_0 = 0$, $T_1 = \tau_{01}$, $T_2 = \tau_{01} + \tau_{10}$.

Задача. Оскільки модель будують для того, щоб на ній можна було вирішити задачу, відповідь якої до цього був для нас зовсім не очевидний (див. лекцію 01), те сформулюємо таку задачу до даного приклада. Визначити частку часу протягом доби, що займає простій верстата (порахувати по малюнку) $T_{ср} = (T + T + T + T\ )/N$.

Алгоритм імітації буде мати такий вигляд (див. мал. 33.12).

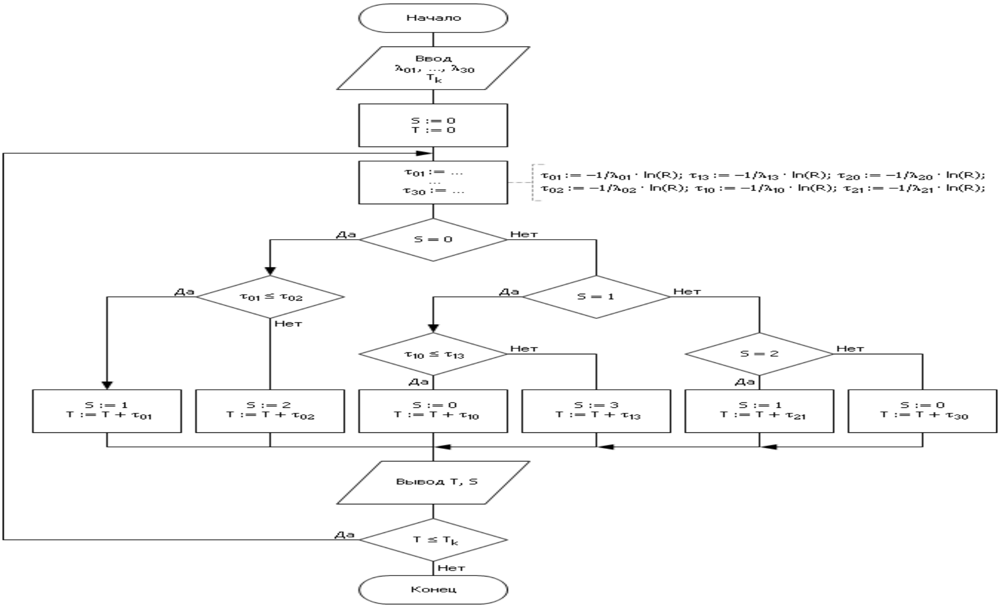


Рис. 33.12. Блок-схема алгоритму моделювання безперервного марковського процесу на прикладі імітації роботи верстата

Дуже часто апарат марковських процесів використовується при моделюванні комп'ютерних ігор, дій комп'ютерних героїв.