ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6

ФРАКТАЛЬНІ ЧАСОВІ РЯДИ

Цель: изучение основ построения фрактальных кривых.

Фрактальные временные ряды – целый класс фрактальных кривых, широко используемых при описании и моделировании разнообразнейших явлений в различных областях знаний. С помощью этого подхода описываются такие, казалось бы, не имеющие ничего общего, явления, как движение броуновской частицы, поведение курса обмена валют на финансовых рынках, изменение уровня воды в озерах и реках, и т. д. Необходимо отметить, что рассматриваемые в этом подходе фрактальные кривые не обязательно должны быть зависимостью некоторой величины от времени. Однако важно, что получаемые в результате моделирования кривые являются самоаффинными, а не самоподобными. Кроме того, эти кривые являются однозначными (каждому значению аргумента соответствует одно единственное значение функции).

Алгоритм смещения средней точки (ССТ) является одним из самых популярных методов генерации фрактальных временных рядов, поскольку является наиболее приспособленным и легко реализуемым в качестве компьютерного алгоритма. Для построения берется отрезок единичной длины на оси абсцисс X. Этот отрезок разбивается на $N = 2^m$ частей, где m – любое положительное целое число. В результате на отрезке [0,1] имеем N+1 точку, включая концы отрезка. Эти точки x_i будем нумеровать индексами i от 0 до N.

Результатом работы алгоритма будет массив y_i, задающий значения моделируемой функции в точках x_i. Сначала необходимо задать значения функции в граничных точках $x_0 = 0$ и $x_N = 1$. Эти значения y_0 и y_N задаются произвольно из условий конкретной задачи. Далее следует итеративный процесс, в ходе которого исходный единичный отрезок постепенного разбивается на более мелкие части посредством многократного деления пополам. При этом каждый раз вычисляется значение функции y_c в середине нового рабочего отрезка x_c исходя из значений y_{left} и y_{right} в граничных точках этого отрезка x_{left} и x_{right}. Для этого используется следующее выражение:

$$y_c = \left(y_{left} + y_{right} \right) / 2 + h \qquad (22)$$

где h – случайная величина, распределенная по нормальному гауссову закону с нулевым средним и дисперсией σ_h, которая

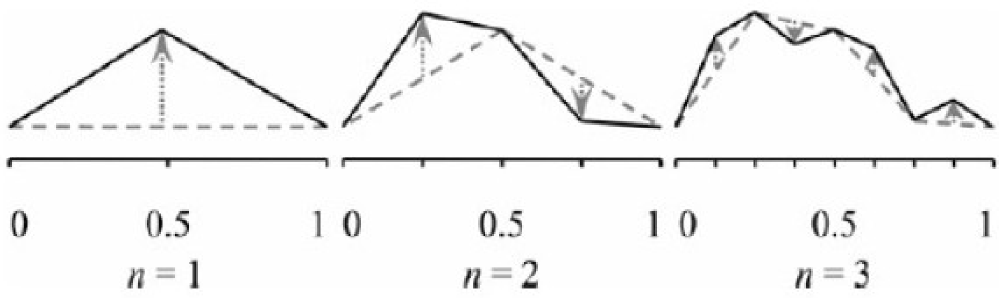

Рис. 9 – Работа метода ССТ на первых итерациях

определяется следующим соотношением:

$$\sigma_h = r^H \qquad (23)$$

где $r = \left(x_{right} - x_{left} \right) / 2$ – расстояние от средней точки рабочего отрезка x_c, где вычисляется новое значение функции, до концов этого отрезка; H – показатель Херста, который непосредственно связан с фрактальной размерностью моделируемой кривой: $D = 2 - H$. Поскольку величина D для фрактальной кривой должна лежать в диапазоне от 1 до 2, то показатель Херста должен удовлетворять следующему условию:

$$0 \leq H \leq 1 \qquad (24)$$

На Рис. 9 представлена работа алгоритма ССТ для первых трех итераций. Для первого шага в качестве рабочего отрезка выступает весь исходный единичный отрезок, а значение функции $y_{N/2}$ вычисляется в центре этого отрезка в точке $x_c = x_{N/2} = 1/2$. В этом случае $x_{left} = x_0 = 0$, $x_{right} = x_N = 1$, $r = 1/2$. В результате после выполнения первого шага мы имеем два отрезка с длиной $1/2$, у каждого из которых известны значения функции на концах. Это позволяет применить выражение (22) для нахождения значений функции $y_{N/4}$ и $y_{3N/4}$ в серединах двух новых рабочих отрезков – точках $y_{N/4} = 1/4$ и $y_{3N/4} = 3/4$ соответственно. И так далее, до тех пор, пока значения функции не будут определены во всех $N+1$ точках.

Выражение (22) раскрывает смысл работы алгоритма ССТ. Фактически, каждый раз вычисляя значение функции в середине отрезка, мы берем среднее значений функции в концах этого отрезка (что соответствует линейной интерполяции) и сдвигаем полученное значение на некоторую случайную величину h. Необходимо отметить, что согласно выражению (23), одновременно с уменьшением длины рабочего отрезка, происходит и уменьшение дисперсии этой величины, то есть случайные отклонения становятся все меньше и меньше. Это справедливо всегда за исключением случая, когда величина H близка к 0. В этом случае дисперсия практически не меняется, а получаемая фрактальная кривая оказывается очень сложной и изрезанной с фрактальной размерностью D, близкой к 2.

На Рис. 10 для сравнения показаны фрактальные кривые, полученные методом ССТ, для трех разных значений D. При этом для удобства сравнения во всех трех случаях при построении кривой генератор псевдослучайных чисел инициализировался одной и той же величиной, что позволило лучше понять характер изменения кривой при изменении D. Общая тенденция ясна – чем больше D (меньше H), тем кривая более сложная, и наоборот, чем меньше D (больше H), тем кривая более гладкая.

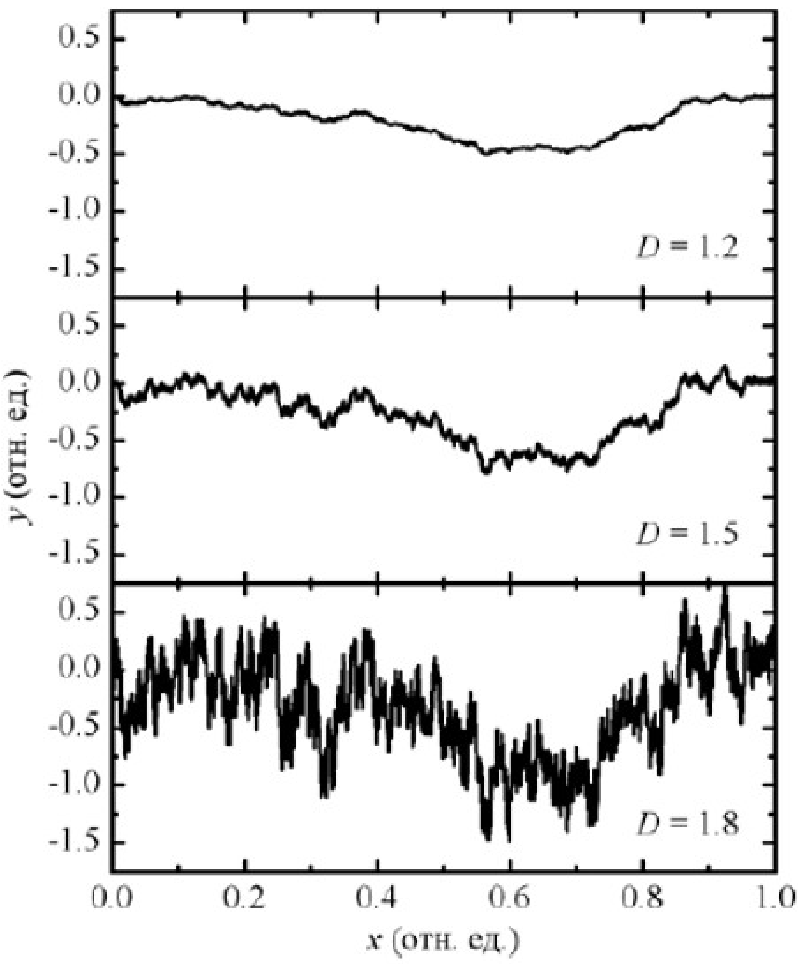

Рис. 10 – Фрактальные кривые, полученные методом ССТ для трех разных значений D

ЗАДАНИЕ

1. Реализовать в системах MAXIMA и MathCAD алгоритм CCT.