

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ

Лекція 7. Детермінований хаос.

Київ – 2015

ПРОСТЕЙШАЯ дискретная динамическая система — это множество с действующей на нём трансформацией: $f: X \rightarrow X$. Под действием этой трансформации каждая точка множества образует свою орбиту — последовательность точек

$$x, \quad f(x), \quad f^2(x) \equiv f(f(x)), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) \equiv \underbrace{f(f \dots (f(x)) \dots)}_{n \text{ раз}}, \quad \dots$$

Для выделенной начальной точки $x_0 \in X$ этот процесс можно записать как последовательность

$$x_0, \quad x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad \dots, \quad x_n = f(x_{n-1}), \quad \dots$$

Определённая таким образом динамическая система является детерминированной: зная начальную точку, мы всегда можем определить её следующее положение, применив к ней трансформацию f .

Задачей теории динамических систем является описание характера эволюции системы во времени: изучение предельных траекторий, их устойчивости, а также типичности самой системы.

Динамические системы описывают многих естественные процессы: от численности популяций до процесса представления вещественного числа в двоичной системе счисления.

2.1 Детерминированный хаос. Теорема Такенса

2.1.1 Детерминированная хаотичность

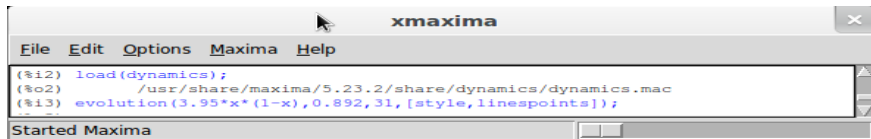
Многие детерминистические динамические системы обнаруживают кажущееся хаотическое поведение. Обратное, по такому хаотическому поведению системы можно предположить, что оно на самом деле не случайно, а задается вполне определённым механизмом.

Классическим примером здесь является логистическая парабола — отображение $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:

$$f(x) = \alpha x(1 - x), \quad \alpha \in [2, 4].$$

Рассмотрим вполне детерминированную последовательность значений¹ $x_n = f(x_{n-1})$, пусть $x_0 = 0.892$, $\alpha = 3.95$. Отобразим эти точки²:

```
п
р
и
и
е
р
load(dynamics)$
evolution(3.95*x*(1-x),0.892,31,[style,linespoints])$
```

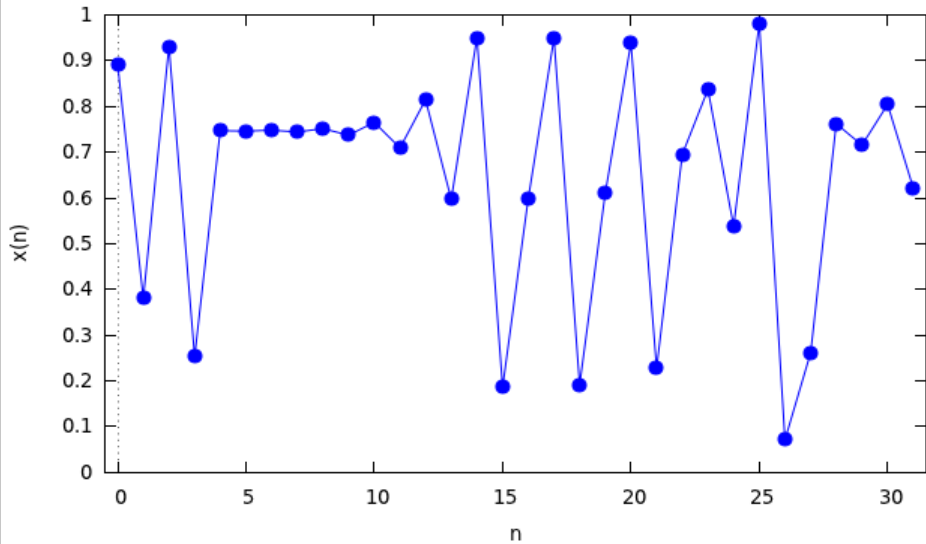


The screenshot shows a window titled "xmaxima" with a menu bar containing "File", "Edit", "Options", "Maxima", and "Help". The main text area contains the following code:

```
(%i2) load(dynamics);
(%o2) /usr/share/maxima/5.23.2/share/dynamics/dynamics.mac
(%i3) evolution(3.95*x*(1-x),0.892,31,[style,linespoints]);
```

At the bottom of the window, a status bar displays "Started Maxima".

Gnuplot (window id : 0)



23.6638, 1.05116

Найдем среднее m и дисперсию s данного набора значений $\{x_k = f(x_{k-1})\}$ и сгенерируем случайную последовательность `randomseq` с нормальным распределением $N(m, s)$:

```
п f(x):=3*x*(1-x)$
р x[0]:0.5$
и
м • for i:0 thru 31 do x[i+1]:f(x[i])$
е [m,s]:[mean(listarray(x)),var(listarray(x))]+$
р randomseq:random_normal(m,s,32)$
```

```

(%i4) f(x):=3*x*(1-x);
(%o4) f(x) := 3 x (1 - x)
(%i5) x[0]:0.5;
(%o5) 0.5
(%i6) for i:0 thru 31 do x[i+1]:f(x[i]);
(%o6) done
(%i7) [m,s]:[mean(listarray(x)),var(listarray(x))];
(%o7) [mean([0.5, 0.75, 0.5625, 0.73828125, .5796661376953125,
.7309599195141345, .5899725467340735, .7257148225025549, .5971584567079203,
.7216807028704055, .6025729979246489, .7184363402902498, .6068566957218066,
.7157449397382518, .6103623629320143, 0.713460446544187, .6133039132834688,
.7114866697039566, .6158201656125887, .7097570677124175, .6180059176340649,
.7082238102100269, .6199285345848561, 0.706851439776987, .6216374455865626,
.7056129954935281, .6231698882525353, .7044875358835738, .6245545430047923,
.7034584974506021, .6258139194454301, .7025125730213365,
.6269659733048335]), var([0.5, 0.75, 0.5625, 0.73828125, .5796661376953125,
.7309599195141345, .5899725467340735, .7257148225025549, .5971584567079203,
.7216807028704055, .6025729979246489, .7184363402902498, .6068566957218066,
.7157449397382518, .6103623629320143, 0.713460446544187, .6133039132834688,
.7114866697039566, .6158201656125887, .7097570677124175, .6180059176340649,
.7082238102100269, .6199285345848561, 0.706851439776987, .6216374455865626,
.7056129954935281, .6231698882525353, .7044875358835738, .6245545430047923,
.7034584974506021, .6258139194454301, .7025125730213365,
.6269659733048335])] ]

```

```
(%i8) randomseq:random_normal(m,s,32);
(%o8) random_normal(mean([0.5, 0.75, 0.5625, 0.73828125, .5796661376953125,
.7309599195141345, .5899725467340735, .7257148225025549, .5971584567079203,
.7216807028704055, .6025729979246489, .7184363402902498, .6068566957218066,
.7157449397382518, .6103623629320143, 0.713460446544187, .6133039132834688,
.7114866697039566, .6158201656125887, .7097570677124175, .6180059176340649,
.7082238102100269, .6199285345848561, 0.706851439776987, .6216374455865626,
.7056129954935281, .6231698882525353, .7044875358835738, .6245545430047923,
.7034584974506021, .6258139194454301, .7025125730213365,
.6269659733048335]), var([0.5, 0.75, 0.5625, 0.73828125, .5796661376953125,
.7309599195141345, .5899725467340735, .7257148225025549, .5971584567079203,
.7216807028704055, .6025729979246489, .7184363402902498, .6068566957218066,
.7157449397382518, .6103623629320143, 0.713460446544187, .6133039132834688,
.7114866697039566, .6158201656125887, .7097570677124175, .6180059176340649,
.7082238102100269, .6199285345848561, 0.706851439776987, .6216374455865626,
.7056129954935281, .6231698882525353, .7044875358835738, .6245545430047923,
.7034584974506021, .6258139194454301, .7025125730213365,
.6269659733048335]), 32)
```


`listarray(x)` — в данном случае возвращает список элементов недеklarированного массива $\{x[0], \dots, x[n]\}$ (а попросту, набора не связанных друг с другом переменных);

`mean(x)` — среднее выборки, представленной списком x ;

`var(x)` — дисперсия выборки, представленной списком x ;

`random_normal(m,s)` — псевдослучайная величина, распределенная нормально со средним m и дисперсией s ;

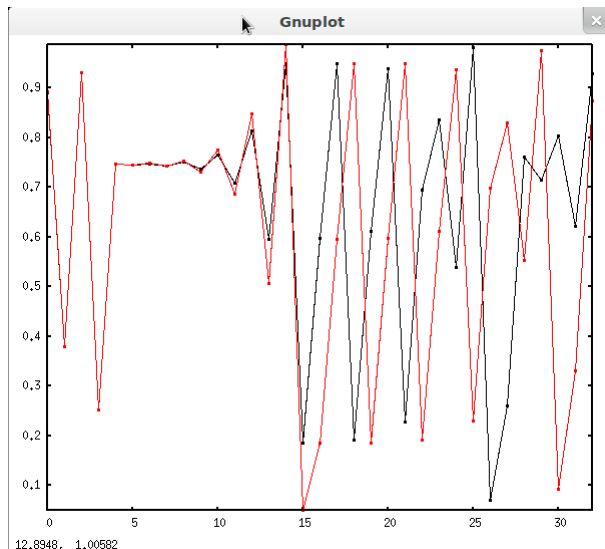
`random_normal(m,s,n)` — псевдослучайный набор из n чисел, распределённых нормально со средним m и дисперсией s

2.1.2 Существенная зависимость от начальных условий

Проиллюстрируем ещё одно характерное для данного случая свойство, называемое *существенной зависимостью от начальных условий*. Изобразим на одном графике две траектории для логистического отображения: при $x_0 = 0.892$ и $x_0 = 0.89201$ ($\alpha = 3.95$ в обоих случаях).

```
п
р
и
м
е
р
load(draw)$
f(x):=3.95*x*(1-x)$
x[0]:0.892$
orb:append([[0,x[0]]],makelist([i+1,x[i+1]:f(x[i])],i,0,31))$
x[0]:0.89201$
orb2:append([[0,x[0]]],makelist([i+1,x[i+1]:f(x[i])],i,0,31))$
draw2d(point_type=circle,points_joined=true,
        points(orb),color=red,points(orb2))$
```

Здесь для удобства мы воспользовались командой `draw2d` из пакета `draw`, описанной в первой части пособия. Кроме того, здесь создание последовательностей $\{x_i\}$ и $orb = \{i, x_i\}$ происходит в одной строчке.



Легко заметить, что небольшое возмущение начального значения влечёт существенное изменение траектории.

2.1.3 Бифуркации, катастрофы в качественном поведении

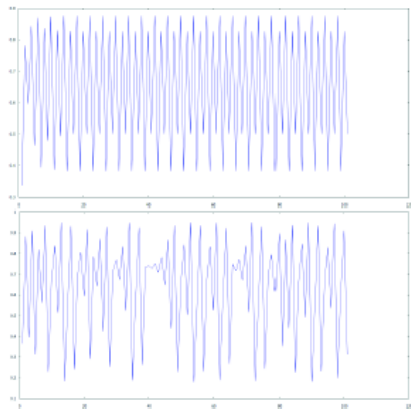
На примере нашего логистического отображения покажем ещё одно интересное свойство — качественное изменение поведения системы при небольших изменениях управляющего параметра. Если рассматривать α как параметр системы (аналогично параметру c в предыдущей главе), то можно заметить, например, что в окрестности точки $\alpha = 3.5$ системы $f(x, \alpha)$ имеют предельный цикл периода 4, в то время как в окрестности $\alpha = 3.7$ обнаруживается хаотическое поведение.

Изобразим это на двух графиках: пусть $x_0 = 0.892$ в обоих случаях.

Изобразим это на двух графиках: пусть $x_0 = 0.892$ в обоих случаях.

п
р
и
м
е
р

```
load(dynamics)$  
evolution(3.5*x*(1-x), 0.892, 100)$  
evolution(3.8*x*(1-x), 0.892, 100)$
```



2.1.4 Теорема Такенса о вложении

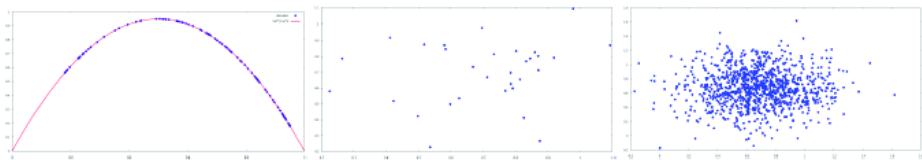
Одним из способов проверки, является ли данный набор данных не случайным, а порожденным некоторой неизвестной зависимостью, например так:

$$x_n = F(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \quad \text{где } k \text{ «не очень большое»,}$$

— является теорема Такенса о вложении.

Вложим одномерную последовательность $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ в плоскость в виде последовательности:

$$\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, x_{n+1}), \dots\}.$$

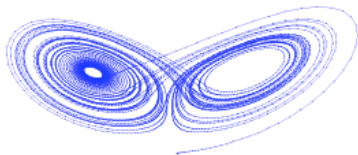
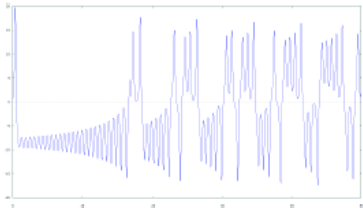


2.2 Фрактальные аттракторы динамических систем

2.2.1 Аттрактор Лоренца

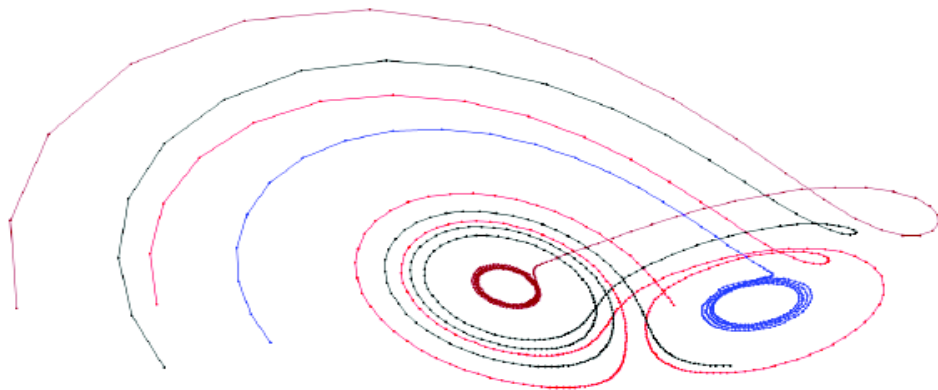
$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(r - z) - y, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases}$$

```
load(dynamics)$  
[sigma,r,b]:[10,28,8/3]$  
eq:[sigma*(y-x),x*(r-z)-y,x*y-b*z]$  
init:[1.0,0,0]$  
t_range:[t,0,50,0.01]$  
sol:rk(eq,[x,y,z],init,t_range)$  
len:length(sol)$  
t:makelist(sol[k][1],k,1,len)$  
x:makelist(sol[k][2],k,1,len)$  
y:makelist(sol[k][3],k,1,len)$  
z:makelist(sol[k][4],k,1,len)$  
plot2d([discrete,t,x])$  
  
load(draw)$  
draw3d(point_size=0.2,points_joined=true,  
        point_type=filled_circle,points(x,y,z))$
```

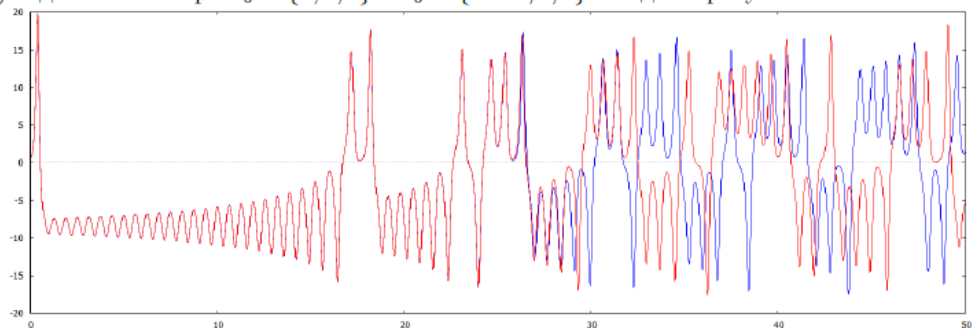


Отметим, что области графика $x(t)$, лежащие выше оси $x = 0$, соответствуют виткам в правой части «крыла бабочки» аттрактора Лоренца, а ниже лежащие области — виткам в левой её части. Обдумайте связь между поведением $x(t)$ и движением точки по аттрактору в фазовом пространстве. Очевидно, такую же связь можно усмотреть, если построить графики $y(t)$ и $z(t)$.

Одно из свойств аттрактора Лоренца как странного аттрактора: он является аттрактором, то есть, к нему «притягиваются» другие траектории в фазовом пространстве. Все траектории отличаются начальными значениями $r_0 = \{x(0), y(0), z(0)\} = \{x_0, y_0, z_0\}$ задачи Коши.




Другим свойством является существенная зависимость от начальных условий. Выберем одну из координат в фазовом пространстве: пусть это будет x . Изобразим два решения $x(t)$ задачи Коши: при $r_0 = \{1, 0, 0\}$ и $r_0 = \{1.001, 0, 0\}$ на одном рисунке.



При близких начальных условиях различия в траекториях проявляются экспоненциально быстро, поведение систем разительно отличается: там где синий график выше оси $x = 0$, а красный — ниже, — точки фазового пространства находятся в разных «крыльях бабочки», а значит, например, движение цилиндров в эксперименте Лоренца происходит в противоположных направлениях, и его трудно предсказать при неточности в начальном значении.

ДОМАШНЕ ЗАВДАННЯ

 Постройте графики $y(t)$ и $z(t)$ для аттрактора Лоренца, как это сделано для графика $x(t)$ на странице с. 21. Пронаблюдайте связь между поведением графиков и характером движения точки в фазовом пространстве относительно аттрактора.