МУЛЬТИПАРАДИГМЕННЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Лекція 8

Основи нечіткого програмування

Поняття нечіткості знань

При розробці інтелектуальних систем знання про конкретну предметну область, для якої створюється система, рідко бувають повними й абсолютно достовірними. Навіть кількісні дані, отримані шляхом досить точних експериментів, мають статистичні оцінки вірогідності, надійності, значимості і т. д. Інформація, якою заповнюються експертні системи, отримується у результаті опитування експертів, думки яких є суб'єктивними і можуть розходитися. Поряд із кількісними характеристиками в базах знань інтелектуальних систем повинні зберігатися якісні показники, евристичні правила, текстові знання і т. д. При обробці знань із застосуванням твердих механізмів формальної логіки виникає протиріччя між нечіткими знаннями і чіткими методами логічного виведення. Розв'язати це протиріччя можна шляхом подолання нечіткості знань (коли це можливо) або використанням спеціальних методів подання й обробки нечітких знань.

Зміст терміна *нечіткість* багатозначний та включає такі основні компоненти: недетермінованість виведень, багатозначність, ненадійність, неповнота, неточність.

Недетермінованість виведень – це характерна риса більшості систем штучного інтелекту. Недетермінованість означає, що заздалегідь шлях вирішення конкретної задачі в просторі її станів визначити неможливо. Тому в більшості випадків методом проб і помилок вибирається деякий ланцюжок логічних висновків, що узгоджуються з наявними знаннями, а у випадку якщо він не приводить до успіху, організується перебір з поверненням для пошуку іншого ланцюжка і т. д. Такий підхід припускає визначення деякого первісного шляху. Для вирішення подібних задач запропоновано багато евристичних методів. Недетермінованість виведень варто враховувати при розробці ефективних способів подання і збереження знань, а також при побудові методів пошуку й обробки знань, що дозволяють одержати рішення задачі за найменше число кроків. Для побудови таких методів звичайно застосовуються евристичні *метазнання* (знання про знання).

Ненадійність знань і виведень означає, що для оцінки вірогідності знань не можна застосувати двобальну шкалу (1 – абсолютно достовірні знання, 0 – недостовірні знання). Для більш тонкої оцінки вірогідності знань застосовується імовірнісний підхід, заснований на теоремі Байєса, і інші методи (наприклад, метод виведення з використанням коефіцієнтів упевненості). Широке застосування на практиці одержали нечіткі виведення, які будуються на базі нечіткої логіки, що веде своє походження від теорії нечітких множин.

Неповнота знань і немонотонна логіка. Абсолютно повних знань не буває, оскільки процес пізнання нескінченний. У зв'язку з цим стан бази знань повинний змінюватися з часом. На відміну від простого додавання інформації, як у базах даних, при додаванні нових знань виникає небезпека одержання суперечливих висновків: тобто висновки, отримані з використанням нових знань, можуть спростовувати ті, що були отримані раніше. Ще гірше, якщо нові знання будуть знаходитися в протиріччі з старими, тоді механізм виведення може стати непрацездатним.

Більшість експертних систем першого покоління були засновані на моделі закритого світу, обумовленій застосуванням апарату формальної логіки для обробки знань.

Модель закритого світу припускає твердий добір знань, що включаються в базу, а саме: база знань заповнюється винятково вірними поняттями, а усе, що ненадійно або невиразно, свідомо вважається помилковим. Така модель має обмежені можливості подання знань і таїть у собі небезпеку одержання протиріч при додаванні нової інформації. Недоліки моделі закритого світу пов'язані з тим, що формальна логіка виходить з передумови, відповідно до якої набір визначених у системі аксіом (знань) є *повним* (теорія є повною, якщо кожний її факт можна довести, виходячи з аксіом цієї теорії). Для повного набору знань справедливість раніше отриманих виведень не порушується з додаванням нових фактів. Ця властивість логічних виведень називається *монотонністю.* На жаль, реальні знання, що закладаються в експертні системи, украй рідко бувають повними.

Неточність знань. Відомо, що кількісні дані (знання) можуть бути неточними, при цьому існують кількісні оцінки такої неточності (довірчий інтервал, рівень значимості, ступінь адекватності і т. д.). Лінгвістичні знання також можуть бути неточними. Для врахування неточності лінгвістичних знань використовується теорія нечітких множин. Фактично нечіткість може бути ключем до розуміння здатності людини справлятися з задачами, що занадто складні для вирішення на ЕОМ. Розвиток досліджень в області нечіткої математики призвів до появи нечіткої логіки і нечітких виведень, що виконуються з використанням знань, представлених нечіткими множинами, нечіткими відношеннями, нечіткими відповідностями і т. д.

Теорія Заде

Теорія нечітких множин (fuzzy sets theory) бере свій початок з 1965 року, коли професор Лотфі Заде (Lotfi Zadeh) з університету Берклі опублікував основну роботу «Fuzzy Sets» у журналі «Information and Control». Прикметник «fuzzy» (нечіткий, розмитий), введено в назву нової теорії з метою відокремлення від традиційної чіткої математики й аристотелевої логіки, що оперують з чіткими поняттями: «належить – не належить», «істина – хибність». Концепція нечіткої множини зародилася у Заде «як незадоволеність математичними методами класичної теорії систем, що змушувала домагатися штучної точності, недоречної в багатьох системах реального світу, особливо в так званих гуманістичних системах, що включають людей».

Початком практичного застосування теорії нечітких множин можна вважати 1975 рік, коли Е. Мамдані (E. Mamdani) побудував перший нечіткий контролер. Успіх першого промислового контролера, заснованого на нечітких лінгвістичних правилах «Якщо – то» привів до сплеску інтересу до теорії нечітких множин серед математиків та інженерів.

Можливість використання нечіткої логіки базується на таких результатах.

У 1992 р. Коско (B. Kosko) була доведена *теорема про нечітку апроксимацію* (Fuzzy Approximation Theorem), відповідно до якої будь-яка математична система може бути апроксимована системою, заснованою на нечіткій логіці. Іншими словами, за допомогою природно-мовних висловлень-правил «Якщо – то», з подальшою їх формалізацією засобами теорії нечітких множин, можна скільки завгодно точно відбити довільний взаємозв'язок «вхід – вихід» без використання складного апарата диференціального й інтегрального числень, традиційно застосовуваного в керуванні й ідентифікації.

У 1992 р. Ванг (L. Wang) показав, що нечітка система є універсальним апроксиматором, тобто може апроксимувати будь-яку неперервну функцію з довільною точністю, якщо використовує набір з n ($n \to \infty$) правил виду «Якщо – то», гаусові функції приналежності, композиції у вигляді добутку, імплікації у формі Ларсена та центроїдний метод приведення до чіткості.

У 1995 р. Кастро (J. Castro) показав, що логічний контролер Мамдані також є універсальним апроксиматором при симетричних трикутних функціях приналежності, композиції з використанням операції мінімум, імплікації у формі Мамдани і центроїдного методу приведення до чіткості.

Основні *недоліки систем з нечіткою логікою*: вихідний набір нечітких правил, що постулюються, формулюється експертом-людиною і може виявитися неповним або суперечливим; вид і параметри функцій приналежності, що описують вхідні і вихідні змінні системи, вибираються суб'єктивно і можуть виявитися такими, що цілком не відбивають реальну дійсність.

Нечіткі множини та змінні

Нехай E – універсальна множина, x – елемент E, а G – деяка властивість. Звичайна *(чітка) підмножина* A універсальної множини E, елементи якої мають властивість G, визначається як множина впорядкованих пар $\{<\ _A(x)|x>\}$, де $\ _A(x)$ – характеристична функція приналежності, що приймає значення 1, якщо x має властивість G, та 0 – у протилежному випадку.

Нечітка підмножина відрізняється від звичайної тим, що для елементів x з E немає однозначної відповіді «ні» або «так» щодо властивості G. У зв'язку з цим *нечітка підмножина* A універсальної множини E визначається як множина впорядкованих пар $A = \{<\ _A(x)|x>\}$, де $\ _A(x)$ – характеристична *функція приналежності* (або просто функція приналежності), що приймає значення в деякій цілком впорядкованій множині M (наприклад, $M = [0; 1]$).

Функція приналежності вказує ступінь приналежності елемента х підмножині A. Множину M називають *множиною приналежностей*. Якщо $M = \{0, 1\}$, то нечітка підмножина A може розглядатися як чітка множина.

Нечітка змінна визначається як $<a, E, A>$, де a – найменування змінної, $E = \{x\}$ – область визначення змінної, набір можливих значень x, $A=\{<\ _A(x)|x>\}$ – нечітка множина, що описує обмеження на можливі значення змінної a (семантику). Нечітка змінна – це теж саме, що і нечітке число, тільки з додаванням імені, яким формалізується поняття, що описується цим числом.

Лінгвістична змінна визначається як $<B, T, X, G, M>$, де B – найменування змінної, T – множина її значень (базова терм-множина), що складається з найменувань нечітких змінних, областю визначення кожної з яких є множина X; G – синтаксична процедура (граматика), що дозволяє оперувати елементами терм-множини T, зокрема – генерувати нові осмислені терми; $T=T \cup G(T)$ задає розширену терм-множину ($\cup$ – знак об’єднання); M – семантична процедура, що дозволяє приписати кожному новому значенню лінгвістичної змінної нечітку семантику, шляхом формування нової нечіткої множини.

Лінгвістична змінна – це множина нечітких змінних, вона використовується для того, щоб дати словесний опис деякому нечіткому числу, отриманому в результаті деяких операцій.

Терм-множина – це множина всіх можливих значень лінгвістичної змінної.

Терм – будь-який елемент терм-множини. У теорії нечітких множин терм формалізується нечіткою множиною за допомогою функції приналежності.

Нечіткий терм – це нечітка множина, яка має властивість, якій відповідає певне поняття.

Функції приналежності

Функції приналежності нерозривно пов'язані із нечіткими множинами. Тип функції приналежності в значному ступені визначає властивості нечіткої системи.

Задавання функцій приналежності можна здійснювати у вигляді списку з явним перерахуванням усіх елементів та відповідних ним значень функції приналежності (наприклад, використовуючи відносні частоти за даними експерименту як значення приналежності), або аналітично у вигляді формул (наприклад, використовуючи типові форми кривих для завдання функцій приналежності (у формі (L-R)-типу) з уточненням їхніх параметрів відповідно до даних експерименту).

Існують прямі та непрямі *методи побудови функцій приналежності*.

При використанні *прямих методів* експерт просто задає для кожного $x \in E$ значення (x). Як правило, прямі методи побудови функції приналежності використовуються для вимірних понять, таких як швидкість, час, відстань, тиск, температура і т. д., або тоді, коли виділяються полярні значення.

У багатьох задачах при характеристиці об'єкта можна виділити набір ознак і для кожної з них визначити полярні значення, що відповідають значенням функції приналежності 0 або 1. Для конкретного об'єкта експерт, виходячи з приведеної шкали, задає $_A(x) \in [0, 1]$, формуючи векторну функцію приналежності $\{ \ _A(x_1), \ _A(x_2), \ldots, \ _A(x_n)\}$.

Різновидом прямих методів побудови функцій приналежності є *прямі групові методи*, коли, наприклад, групі експертів пред'являють конкретний об'єкт, і кожен повинний дати одну з двох відповідей: належить чи не належить цей об'єкт до заданої множини. Тоді число позитивних відповідей, поділене на загальне число експертів, дає значення функції приналежності об'єкта до даної нечіткої множини.

Непрямі методи визначення значень функції приналежності використовуються у випадках, коли немає вимірних елементарних властивостей, через які визначається нечітка множина. Як правило, це *методи попарних порівнянь*. Якщо значення функцій приналежності відомі, наприклад, $_A(x_i) = w_i$, $i = 1, 2, ..., n$, то попарні порівняння можна подати матрицею відношень $A = \{a_{ij}\}$, де $a_{ij} = w_i/w_j$ (операція розподілу).

На практиці експерт сам формує матрицю А, при цьому передбачається, що діагональні елементи дорівнюють 1, а для елементів, симетричних щодо головної діагоналі, $a_{ij} = 1/a_{ji}$, тобто якщо один елемент оцінюється як в а разів

Метод побудови функцій приналежності шляхом кластеризації експериментальних даних. Будемо вважати, що відомі числові значення певного показника: $(y_1, y_2, ..., y_v)$, де v – кількість значень. Розглядаються дві задачі побудови функцій приналежності за цими даними.

Перша задача – синтез нечітких множин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_C$, функції приналежності яких відповідають скупченням даних $(y_1, y_2, ..., y_v)$: $(y_1, y_2, ..., y_v) \rightarrow (\mu_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, v$, $j = 1, 2, \ldots, C$, де μ_{ij} – ступінь приналежності елемента нечіткій множині Y_j. Для вирішення даної задачі використовують нечітку кластеризацію за методом *нечітких с-середніх*.

Друга задача – синтез однієї нечіткої множини Y, функція приналежності якої відповідає розподілу даних $(y_1, y_2, ..., y_v)$, що відповідає відображенню виду: $(y_1, y_2, ..., y_v) \rightarrow (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_v,)$, $i = 1, 2, \ldots, v$, $j = 1, 2, \ldots, C$, де де μ_i – ступінь приналежності елемента нечіткій множині Y. Для вирішення даної задачі використовують *потенційну функцію* з *гірського методу кластеризації*.

Потенціал точки – це число, що показує наскільки щільно в її околиці розташовані експериментальні дані. Чим вище потенціал точки, тим ближче вона до центра кластера. Потенціал точки y_i, $i = 1, 2, \ldots, v$, визначається за формулою:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{v} e^{-4\alpha^2 (y_i - y_j)^2},$$

де $\alpha > 0$ – коефіцієнт, що задає ступінь компактності кластера. Перед застосуванням цієї формули експериментальні дані слід відобразити на відрізок [0, 1].

Ступені приналежності нечіткій множині Y розраховують у такий спосіб:

$$\mu_Y(y_i) = \frac{\varphi_i}{\max\limits_{j=1,2,\ldots,v} \varphi_j}.$$

При необхідності знайдену нечітку множину Y можна апроксимувати придатною параметричною функцією приналежності.

Візуалізувати функції приналежності нечітких множин можна шляхом побудови графіку залежності значення функції приналежності від значення елемента нечіткої множини *x*.

Виділяють такі основні *типи функцій приналежності*: кусочно-лінійні функції, *Z*-образні та *S*-образні функції, *П*-образні функції.

Розглянемо основні *функції приналежності*. При цьому визначимо формат виклику функцій пакету MATLAB, що реалізують відповідні функції приналежності.

Кусочно-лінійні функції.

Трикутна функція:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a < x < b, \\ \dfrac{c-x}{c-b}, b \le x < c, \\ 0, c \le x, \end{cases}$$

де a, b, c – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення й упорядковані відношенням: $a \le b \le c$. Ця функція в пакеті Matlab має ім’я trimf, порядок її параметрів:[a, b, c].

Трапецієподібна функція:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x < b, \\ 1, b \le x \le c, \\ \dfrac{d-x}{d-c}, c < x \le d, \\ 0, d < x, \end{cases}$$

де a, b, c, d – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення й упорядковані відношенням: $a \le b \le c \le d$. Ця функція в пакеті Matlab має ім'я trapmf, порядок її параметрів:[a, b, c, d].

$$\mu(x)=\begin{cases}1, x<a,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right), a\le x\le b,\\ 0, x>b,\end{cases}$$

де a, b – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення й упорядковані відношенням: $a < b$.

Сплайн-функція може бути також задана іншим виразом:

$$\mu(x)=\begin{cases}1, x\le a,\\ 1-2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, a<x\le\frac{a+b}{2},\\ 2\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2, \frac{a+b}{2}<x<b,\\ 0, b\le x,\end{cases}$$

де a, b – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення й упорядковані відношенням: $a < b$. Ця функція в пакеті Matlab має ім’я zmf, порядок її параметрів:[a, b].

Лінійна Z-образна функція:

$$\mu(x)=\begin{cases}1, x\le a,\\ \dfrac{b-x}{b-a}, a<x<b,\\ 0, b\le x,\end{cases}$$

де a, b – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення й упорядковані відношенням: $a < b$.

S-образна крива (сплайн-функція):

$$\mu(x)=\begin{cases}0, x<a,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x-b}{b-a}\pi\right), a\le x\le b,\\ 1, x>b,\end{cases}$$

де a, b – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення й упорядковані відношенням: $a < b$.

Сплайн-функція може бути також задана іншим виразом:

$$\mu(x)=\begin{cases}0, x\le a,\\ 2(x-a)^2(b-a)^{-2}, a<x\le 0{,}5(a+b),\\ 1-2(b-x)^2(b-a)^{-2}, 0{,}5(a+b)<x<b,\\ 1, b\le x,\end{cases}$$

де a, b – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення й упорядковані відношенням: $a < b$. Ця функція в пакеті Matlab має ім'я smf, порядок її параметрів:[a, b].

Лінійна S-образна функція:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a < x < b, \\ 1, b \le x, \end{cases}$$

де a, b – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення й упорядковані відношенням: $a < b$.

Сигмоїдна (сигмоїдальна) функція може бути віднесена одночасно до Z-образних і *S*-образних функцій: $\mu(x)=\dfrac{1}{1+e^{-a(x-b)}}$, де a, b – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення й упорядковані відношенням: $a < b$, e – основа натуральних логарифмів. При $a > 0$ може бути отримана *S*-образна функція, при $a < 0$ – Z-образна функція. Ця функція в пакеті Matlab має ім'я sigmf, порядок її параметрів:[a, b].

П-образні функції

П-образна (пі-образна) функція: $\mu(x)=\mu_S(x)\mu_Z(x)$, де $\mu_S(x)$ – S-образна функція, $\mu_Z(x)$ – Z-образна функція. Ця функція в пакеті Matlab має ім'я pimf, порядок її параметрів:[a b c d], де [a d] – носій нечіткої множини; [b c] – ядро нечіткої множини; [a b] – параметри функції smf, [c d] – параметри функції zmf.

Добуток двох сигмоїдних функцій: $\mu(x)=\dfrac{1}{1+e^{-a(x-b)}}\cdot\dfrac{1}{1+e^{-c(x-d)}}$,

де a, b, c, d – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення, причому $a > 0$, $c < 0$, і упорядковані відношенням: $a \le b < |c| \le d$, e – основа натуральних логарифмів. Ця функція в пакеті Matlab має ім'я psigmf, порядок її параметрів:[a b c d].

Різниця між двома сигмоїдними функціями:

$$\mu(x)=\frac{1}{1+e^{-a(x-b)}}-\frac{1}{1+e^{-c(x-d)}},$$

де a, b, c, d – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення й упорядковані відношенням: $a<b$, $c<d$, e – основа натуральних логарифмів. Ця функція в пакеті Matlab має ім'я dsigmf, порядок її параметрів:[a b c d].

Узагальнена колоколообразна функція:

де a, b, c – числові параметри, що приймають довільні дійсні значення й упорядковані відношенням: $a < b < c$, при чому $b > 0$. Ця функція в пакеті Matlab має ім'я gbellmf, порядок її параметрів:[a b c].

Симетрична гаусівська функція щільності нормального розподілу:

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}},$$

де a^2 – дисперсія розподілу, b – математичне сподівання. Ця функція в пакеті Matlab має ім'я gaussmf, порядок її параметрів:[a b].

Двостороння гаусівська функція приналежності:

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} \cdot e^{-\frac{(x-d)^2}{2c^2}},$$

де a^2, c^2 – дисперсії розподілів, b, d – математичні сподівання. Ця функція в пакеті Matlab має ім'я gauss2mf, порядок її параметрів:[a b c d].

Основні характеристики та властивості нечітких множин

Нехай A – нечітка множина з елементами з універсальної множини E та множиною приналежностей $M = [0;\, 1]$.

Висотою (супремумом) нечіткої множини A називається величина $\sup(\mu_A) = \max\limits_{x \in E} \mu_A(x)$ – це точна верхня грань або максимальне значення приналежності, що є у множині.

Нормальною є нечітка множина A, якщо її висота дорівнює 1, тобто верхня межа її функції приналежності дорівнює 1 ($\max\limits_{x \in E} \mu_A(x) = 1$).

Субнормальною називається нечітка множина A при $\max\limits_{x \in E} \mu_A(x) < 1$.

Порожньою називається нечітка множина A (порожня множина позначається як $\varnothing$), якщо $\forall x \in E: \quad {}_A(x) = 0$.

Унімодальною є нечітка множина A, якщо ${}_A(x) = 1$ тільки на одному x з E.

Ядром нечіткої множини A називають таку звичайну множину A_1, елементи якої задовольняють умові: $A_1 = \{\, x \in E \mid \quad {}_A(x) = 1 \,\}$.

Носієм нечіткої множини A є звичайна підмножина B з властивістю $_A(x) > 0$, тобто $B = \{\, x \in E \mid \ _A(x) > 0\}$.

Скінченою є нечітка множина, якщо її носій є скінченою множиною.

Нескінченою є нечітка множина, якщо її носій є нескінченою множиною.

Межами нечіткої множини A є такі елементи універсальної множини Е, для яких значення функції приналежності $_A(x)$ відрізняються від 0 та 1: $0 < \ _A(x) < 1$.

Точками переходу множини A називаються такі елементи $x \in E$, для яких $_A(x) = 0,5$.

Найближчою чіткою множиною A_1 до нечіткої множини A є множина з характеристичною функцією:

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } \mu_A(x) < 0,5, \\ 1, \text{якщо } \mu_A(x) > 0,5, \\ 0 \text{ або } 1, \text{якщо } \mu_A(x) = 0,5. \end{cases}$$

Опуклою називають нечітку множину A, якщо її функція приналежності задовольняє нерівності: $_{A}(x) \geq \min\{\ _{A}(a),\ _{A}(b)\}$, для будь-яких $x, a, b \in E$, при котрих: $a < x < b$ та $a \neq b$.

Міру нечіткості Ягера нечіткої множини A у метриці р визначають як:

$$\mathrm{Fuz}_p(A) = 1 - \frac{D_p(A, \overline{A})}{n^{1/p}},$$

де $D_p(A, \overline{A})$ – міра відстані між множинами A *та* $\overline{A}$, що містять n елементів. Значення $p = 1$ відповідає метриці Хеммінга: $D_1(A, \overline{A}) = \sum_{i=1}^{n} \left| 2\mu_A(x_i) - 1 \right|$,

а $p = 2$ – метриці Евкліда: $D_2(A, \overline{A}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (2\mu_A(x_i) - 1)^2}$.

Лінійний індекс нечіткості визначається за формулою:

$$\nu(A)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(x_i),1-\mu_A(x_i)\}\cdot$$

Квадратичний індекс нечіткості визначається за формулою:

$$\eta(A)=\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A^2(x_i),1-\mu_A(x_i)\}}\cdot$$

Ентропія нечіткої множини А визначається за формулою:

$$H(A)=-\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n}(\pi_A(x_i)\ln\pi_A(x_i)),\ \pi_A(x_i)=\frac{\mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)}\cdot$$

Міру нечіткості Коско (ентропійну) визначають як:

$$\mathrm{Fuz}(A)=\frac{\mathrm{card}(A\cap\overline{A})}{\mathrm{card}(A\cup\overline{A})},$$

$$\mathrm{card}(F) = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)\ .$$

Чітка множина α-рівня (*альфа-зріз*) A_α нечіткої множини A універсальної множини E – елементи, приналежність яких вище або дорівнює заданому порогу: $A_\alpha = \{x|\ \ {}_A(x) \geq \alpha\}$, де α – поріг: $\alpha \leq 1$, (поріг, що дорівнює 1/2, називають *точкою переходу*). Властивість множини *α-рівня*: якщо $\alpha_1 \geq \alpha_2$, то $A_{\alpha_1} \leq A_{\alpha_2}$.

Операції над нечіткостями

Логічні операції

Нехай A та B – нечіткі множини на універсальній множині E.

Доповнення (*заперечення множини*) $\overline{A}$*:* інвертується приналежність кожного елемента: $\forall\, x \in E$, $M = [0, 1]$: $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - {}_{A}(x)$. Тут доповнення визначене для $M = [0, 1]$, але очевидно, що його можна визначити для будь-якого упорядкованого M).

Інволюція – подвійне доповнення: $\overline{\overline{(A)}} = A$.

Включення (*підмножина, домінування*) $A \subseteq B$*:* A міститься в B (B домінує над A), якщо $\forall\, x \in E$: ${}_{A}(x) \leq {}_{B}(x)$.

Непорівненими є нечіткі множини A та B, задані на E, якщо для них не виконуються ані $A \subseteq B$, ані $B \subseteq A$.

Рівність $A = B$*:* A та B рівні, якщо $\forall\, x \in E$: ${}_{A}(x) = {}_{B}(x)$.

Власною нечіткою підмножиною A нечіткої множини B ($A \subset B$) називають, якщо $\forall\, x \in E$: ${}_{A}(x) < {}_{B}(x)$.

Об'єднання (*логічна сума множин*): $A \cup B$ – найменша нечітка підмножина, що містить як A, так і B, з функцією приналежності: $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ – створюється нова множина з елементів вихідних множин, причому для однакових елементів приналежність береться максимальною. Операція об'єднання моделює логічне зв'язування «АБО».

Перетинання (*логічний добуток множин*): $A \cap B$ – найбільша нечітка підмножина, що міститься одночасно в A та B: $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ – створюється нова множина з однакових елементів вихідних множин, приналежність яких береться мінімальною. Операція перетинання моделює логічне зв'язування «ТА».

Властивості операцій об'єднання і перетинання. Нехай A, B, C – нечіткі множини, тоді виконуються наступні властивості:

– комутативність: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
– асоціативність: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

– ідемпотентність: $A \cup A = A, A \cap A = A$;
– дистрибутивність: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
– поглинання: $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$;
– універсальні верхня та нижня межі: $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap E = A$, $A \cup E = E$;
– закони де Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

На відміну від чітких множин, для нечітких множин у загальному випадку не виконуються закон виключення третього і закон тотожності, тобто: $A \cap \overline{A} \neq \varnothing$ та $A \cup \overline{A} \neq E$.

Різниця $A \backslash B$ або $A–B$: $\;_{A\backslash B}(x) = \max\{\;_A(x) - \;_B(x), 0\}$. Зауважимо, що $A\backslash B \neq B\backslash A$.

Симетрична різниця: $A \ominus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $A \ominus B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$: $\mu_{A \ominus B}(x) = \left|\mu_A(x) - \mu_B(x)\right|$.

Диз'юнктивна сума: $A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ з функцією приналежності: $\mu_{A \oplus B}(x) = \max(\min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)), \min(1 - \mu_A(x), \mu_B(x)))$.

Алгебраїчні операції над нечіткими множинами

Алгебраїчний добуток (алгебраїчне перетинання) $A \cdot B$: $\forall x \in E$: ${}_{AB}(x) = {}_{A}(x)\ {}_{B}(x)$.

Алгебраїчна сума (алгебраїчне об'єднання) $A \hat{+} B$:
$\forall x \in E : \mu_{A \hat{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.

Властивості операцій алгебраїчної суми й алгебраїчного добутку:

- комутативність: $A \cdot B = B \cdot A, A \hat{+} B = B \hat{+} A$;
- асоціативність: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), (A \hat{+} B) \hat{+} C = A \hat{+} (B \hat{+} C)$;
- універсальні верхня та нижня межі: $A \hat{+} \varnothing = A$, $A \cdot \varnothing = \varnothing$, $A \cdot E = A$, $A \hat{+} E = E$;
- закони де Моргана: $\overline{A \hat{+} B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \overline{A \cdot B} = \overline{A} \hat{+} \overline{B}$.

Не виконуються:

- ідемпотентність, тобто: $A \hat{+} A \neq A$, $A \cdot A \neq A$;
- дистрибутивність, тобто:
  $A \cdot (B \hat{+} C) \neq (A \cdot B) \hat{+} (A \cdot C), A \hat{+} (B \cdot C) \neq (A \hat{+} B) \cdot (A \hat{+} C)$;
- поглинання, тобто: $A \cdot (A \hat{+} B) \neq A, A \hat{+} (A \cdot B) \neq A$;
- закон виключення третього і закон тотожності, тобто: $A \cdot \overline{A} \neq \varnothing, A \hat{+} \overline{A} \neq E$.

При спільному використанні операцій $\{ \cup, \cap, \hat{+}, \cdot \}$ справедливі властивості: $A \cdot (B \cup C) = (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$, $A \cdot (B \cap C) = (A \cdot B) \cap (A \cdot C)$, $A \hat{+} (B \cup C) = (A \hat{+} B) \cup (A \hat{+} C)$, $A \hat{+} (B \cap C) = (A \hat{+} B) \cap (A \hat{+} C)$.

Обмежена сума (граничне об'єднання) $A|+|B$:

$$_{A|+|B}(x) = \min\{1,\ \ _A(x) + \ \ _B(x)\}.$$

Обмежена різниця $A|-|B$: $_{A|-|B} = \max\{0,\ \ _A(x) - \ \ _B(x)\}$.

Обмежений добуток (граничне перетинання) $A|\cdot|B$:

$$_{A|\cdot|B}(x) = \max\{0,\ \ _A(x) + \ \ _B(x) - 1\}.$$

Драстичне перетинання (від англ. drastic – радикальний) $A \,\Delta\, B$:

$$\mu_{A\Delta \mathrm{B}}(\mathrm{x}) = \begin{cases} \mu_B(x), \text{якщо } \mu_A(x) = 1, \\ \mu_A(x), \text{якщо } \mu_B(x) = 1, \\ 0, \text{інакше.} \end{cases}$$

Драстичне об'єднання $A \nabla B$:

$$\mu_{A\nabla B}(x) = \begin{cases} \mu_B(x), \text{якщо } \mu_A(x) = 0, \\ \mu_A(x), \text{якщо } \mu_B(x) = 0, \\ 1, \text{інакше.} \end{cases}$$

Операція λ-суми $A +_{\lambda} B$: $\ _{A+_{\lambda} B}(x) = \lambda \ \ _{A}(x)+(1-\lambda) \ \ _{B}(x)$, де $\lambda \in [0,1]$.

Операція зведення в ступінь a нечіткої множини A записується як A^{a}, де a – позитивне число, і визначена на основі операції алгебраїчного добутку: $\mu_{A^{a}}(x) = \mu_{A}^{a}(x)$. Окремими випадками зведення в ступінь є:

– CON(A) = A^{2} – *операція концентрування* (концентрації, ущільнення – concentration) зменшує ступінь нечіткості, її лінгвістичне значення – «дуже»;

– DIL(A) = $A^{0.5}$ – *операція розтягання* (dilation) – збільшує ступінь нечіткості, її лінгвістичне значення – «приблизно».

Операція інтенсифікації:

$$\mu_{\mathrm{INT}(A)}(x) = \begin{cases} 2(\mu_{A}(x))^{2}, 0 \le \mu_{A}(x) \le 0{,}5; \\ 1 - 2(1-\mu_{A}(x))^{2}, 0{,}5 \le \mu_{A}(x) \le 1. \end{cases}$$

Множення на число a: приналежності елементів помножаються на число: $\ _{aA}(x) = a \ \ _{A}(x)$, де a – позитивне число, таке, що $\max\limits_{x \in A} \mu_{aA}(x) \le 1$.

Опукла комбінація нечітких множин $A_1, A_2, ..., A_n$ є узагальненням операції λ-суми: $_A(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda_1 \mu_{A_1}(x) + \lambda_2 \mu_{A_2}(x) + ... + \lambda_n \mu_{A_n}(x)$, де $A_1, A_2, ..., A_n$ – нечіткі множини універсальної множини E, $\forall x \in E$, а $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n$ – ненегативні числа, сума яких дорівнює 1.

Декартовий (прямий) добуток нечітких множин $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, є нечіткою підмножиною множини $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ з функцією приналежності: ${}_A(x_1, x_2, ..., x_n) = \min\{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), ..., \mu_{A_n}(x_n) \}$, де $A_1, A_2, ..., A_n$ – нечіткі підмножини універсальних множин $E_1, E_2, ..., E_n$ відповідно.

Нормалізація непорожньої субнормальної множини: перераховують приналежності елементів за формулою:

$$\mu_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\max\limits_{x \in E} \mu_A(x)}.$$

Нечітка імплікація $A \rightarrow B$ визначає причинно-наслідкове відношення між умовами та наслідками правил. Операції нечіткої імплікації можна розділити на три основні класи:

S-імплікація: $\quad {}_{A\rightarrow B}(x) = S\{1- \ {}_{A}(x),\ 1- \ {}_{B}(x)\}$, де S – оператор S-норми;

R-імплікація: $\quad {}_{A\rightarrow B}(x) = \sup\{z \in [0,1] |\ T(\ {}_{A}(x), z) \leq \ {}_{B}(x)\}$,

T-імплікація: $\quad {}_{A\rightarrow B}(x) = T\{\ {}_{A}(x),\ \ {}_{B}(x)\}$, де T – оператор T-норми.

Окремо виділяють нечіткі імплікації, які визначаються:

за Заде: $_{A\to B}(x) = \max\{\min\{\ _A(x),\ \ _B(x)\}, (1-\ _A(x))\}$,

за Кліне-Дайєнісом: $_{A\to B}(x) = \max\{(1-\ _A(x)),\ \ _B(x)\}$,

за Мамдані: $_{A\to B}(x) = \min\{\ _A(x),\ \ _B(x)\}$,

за Лукасевичем:

$_{A\to B}(x) = \min\{1, 1-\ _A(x)+\ _B(x)\}$ або $_{A\to B}(x) = \max\{0,\ \ _A(x)+\ _B(x) - 1\}$,

за Гогуеном: $_{A\to B}(x) = \min\{1,\ \ _B(x)\ /\ \ _A(x)\},\ \ _A(x) > 0$,

за граничною сумою: $_{A\to B}(x) = \min\{1,\ \ _A(x)+\ _B(x)\}$,

за Ларсеном: $_{A\to B}(x) =\ \ _A(x)\ \ _B(x)$,

за Віллмоттом: $_{A\to B}(x) = \min\{\max\{1-\ _A(x),\ \ _B(x)\}, \max\{\ _A(x), 1-\ _B(x), \min\{1-\ _A(x),\ \ _B(x)\}\}\}$,

за Кліне-Дайєнісом-Лукасевичем-Рейхенбахом:

$$_{A\to B}(x) = 1 -\ \ _A(x) +\ \ _A(x)\ \ _B(x),$$

за Ваді: ${}_{A\to B}(x) = \max\{\ {}_{A}(x)\ \ {}_{B}(x),\ 1 - \ {}_{A}(x)\}$,

за Ягером: $\mu_{A\to B}(x) = \mu_A(x)^{\mu_B(x)}$,

за Гейнсом: $\mu_{A\to B}(x) = \begin{cases} 1, \text{якщо } \mu_A(x) \le \mu_B(x), \\ \mu_B(x)/\mu_A(x), \text{інакше}, \end{cases}$

за Гьоделем: $\mu_{A\to B}(x) = \begin{cases} 1, \text{якщо } \mu_A(x) \le \mu_B(x), \\ \mu_B(x), \text{інакше}, \end{cases}$

за Шарпом (стандартною логікою послідовностей R-SEQ):

$$\mu_{A\to B}(x) = \begin{cases} 1, \text{якщо } \mu_A(x) \le \mu_B(x), \\ 0, \text{інакше}, \end{cases}$$

Нечітке включення: ступінь включення нечіткої множини:

$$V(A, B) = (\ {}_A(x_0) \longrightarrow \ {}_B(x_0)) \cap (\ {}_A(x_1) \longrightarrow \ {}_B(x_1)) \cap \ldots$$

Нечітка еквівалентність $A \equiv B$ визначається за формулою:

$${}_{A \equiv B}(x) = \min\{\max\{1- \ {}_A(x), \ \ {}_B(x)\}, \max\{ \ {}_A(x) , 1- \ {}_B(x)\}\}.$$

Оператор збільшення нечіткості використовується для перетворення чітких множин у нечіткі та для збільшення нечіткості нечіткої множини. Нехай A – нечітка множина, E – універсальна множина і для всіх $x \in E$ визначені нечіткі множини $K(x)$. Сукупність усіх $K(x)$ називається *ядром оператора збільшення нечіткості* H. Результатом дії оператора H на нечітку множину A є нечітка множина виду: $H(A,K) = \bigcup\limits_{x \in E} \mu_A(x) K(x)$, де ${}_A(x)K(x)$ – добуток числа на нечітку множину.

Нечітки величини та числа

Нечітка величина – довільна нечітка множина $A=\{<\ {}_A(x)|x>\}$, що задана на множині дійсних чисел R.

Нечіткий інтервал – нечітка величина з опуклою функцією приналежності.

Нечітке число – нечітка величина, функція приналежності якої є опуклою та унімодальною. Нечітке число визначається як нечітка множина A на множині дійсних чисел R з функцією приналежності $\ {}_A(x)\in[0, 1]$, де $x\in R$.

Нечітким нулем називають нечітке число, якщо його мода дорівнює 0.

Позитивним є нечітке число, якщо воно має суворо позитивний носій.

Негативним є нечітке число, якщо воно має суворо негативний носій.

Операції над нечіткими числами A та B з функціями приналежності ${}_A(x)$ та ${}_B(y)$, відповідно, в узагальненому вигляді визначаються як: $A \circ B = C = \{z| \ {}_C(z)\}$, де $\circ$ – символ операції, ${}_C(z)$ – функція приналежності результату, що визначається за формулою:

$$\mu_C(z) = \sup_{z = x \circ y} \{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\} \text{ або } \mu_C(z) = \sup_{z = \circ(x,y)} \{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}.$$

Як операцію замість символу $\circ$ можна задавати: + (додавання), – (віднімання), (множення), / (ділення), min (розширений мінімум), max (розширений максимум).

Нечіткі числа (L-R)*-типу* – це різновид нечітких чисел спеціального виду, що задаються за визначеними правилами з метою зниження обсягу обчислень при операціях над ними.

Функції приналежності нечітких чисел (L-R)*-типу* задаються за допомогою незростаючих на множині невід'ємних дійсних чисел функцій дійсної змінної $L(x)$ та $R(x)$, що задовольняють властивостям: $L(-x) = L(x)$; $R(-x) = R(x)$; $L(0) = R(0)$.

Способи задавання нечітких відношень використовують такі:

– *у формі списку з явним перерахуванням усіх кортежів нечіткого відношення та відповідних ним значень функції приналежності*: $R=\{(w_1, \mu_R(w_1)), \ldots, (w_r, \mu_R(w_r))\}$, де $w_i = <x_1, x_2, \ldots, x_n>$ – i-ий кортеж елементів цього відношення, а r – число кортежів нечіткого відношення R;

– *аналітично* у формі певного математичного виразу для відповідної функції приналежності цього відношення.

Нечітке бінарне відношення може бути подане:

– *графічно* у вигляді певної поверхні або сукупності окремих точок у тривимірному просторі, при цьому вісі абсциси та ординати будуть відповідати універсумам E_1 та E_2, а вісь аплікати – інтервалу [0; 1];

– *у матричній формі:* строки матриці нечіткого відношення при цьому відповідають першим, а стовпці – другим елементам кортежів, елементами матриці є відповідні значення функції приналежності нечіткого відношення;

– *орієнтованим нечітким графом* $G = (V, E, \mu_G)$, що може бути заданий у вигляді двох звичайних скінчених множин: множини вершин нечіткого графа $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ та множини дуг нечіткого графа $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, а також певної функції приналежності дуг даному нечіткому графу $\mu_G : E \to [0;1]$.

Нечіткі відношення

Нечіткий предикат $P(<x_1, x_2, \ldots, x_n>)$ – деяке відображення з декартового добутку універсумів $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ у певну цілковито впорядковану множину значень істинності, зокрема, у інтервал [0; 1]. При цьому змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають *предметними змінними* нечіткого предиката, а декартовий добуток універсумів $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ – *предметною областю* нечіткого предиката.

Характеристиками нечітких відношень є: носій нечіткого відношення, відношення α-рівня, висота нечіткого відношення, нормальність, субнормальність, ядро, найближче чітке відношення, межі, точки переходу, опуклість, що визначаються подібно до нечітких множин: при цьому замість x використовують кортеж $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$, замість A використовують відношення R, а замість E – декартовий добуток $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$.

Модою нечіткого відношення R є кортеж $w_m \in E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, якщо цей кортеж є точкою локального максимуму відповідної функції приналежності $\mu_R(<x_1, x_2, \ldots, x_n>)$, тобто виконується умова: $w_m = \arg\max\{\mu_R(<x_1, x_2, \ldots, x_n>)\}$.

Скінченим є нечітке відношення, якщо його носій є скінченим відношенням.

Рефлексивним є нечітке відношення R на $X \times X$, якщо для будь-якого $x \in X$ виконується рівність $\mu_R(x,x) = 1$. У випадку кінцевої множини X всі елементи головної діагоналі матриці R дорівнюють 1.

Антирефлексивним є нечітке відношення R на $X \times X$, якщо для будь-якого $x \in X$ виконується рівність $\mu_R(x,x) = 0$. У випадку кінцевої множини X всі елементи головної діагоналі матриці R дорівнюють 0.

Симетричним є нечітке відношення R на $X \times Y$, якщо для будь-якої пари $(x, y) \in X \times Y$ виконується рівність $\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x)$. Матриця симетричного нечіткого відношення, заданого на кінцевій множині, є симетричною.

Асиметричним є нечітке відношення R на $X \times Y$, якщо для будь-якої пари $(x, y) \in X \times Y$ справедливий вираз: $\mu_R(x,y) > 0 \Rightarrow \mu_R(y,x) = 0$.

Зворотними є нечіткі відношення R та R^{-1} на $X \times Y$, якщо для будь-якої пари $(x, y) \in X \times Y$ виконується рівність: $\mu_R(x,y) = \mu_{R^{-1}}(y,x)$.

Транзитивним є нечітке відношення R на $X \times Y$, якщо $R \circ R \subseteq R$. Іншими словами, для будь-якої пари $(x, y) \in X \times Y$ ступінь виконання відношення R повинна бути не менше за ступінь виконання відношення $R \circ R$.

Транзитивним замиканням нечіткого відношення R є відношення:

$$\hat{R} = \bigcup_{n=1,2,\ldots} R^n \text{, де } R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ разів}}.$$

Операції над нечіткими відношеннями

Об'єднання двох відношень $R_1 \cup R_2$ визначається з виразу:

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = \max(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)).$$

Перетинання двох відношень $R_1 \cap R_2$ визначається з виразу:

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x, y) = \min(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)) .$$

Алгебраїчний добуток двох відношень $R_1 \cdot R_2$ визначається з виразу:

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \cdot \mu_{R_2}(x, y) .$$

Алгебраїчна сума двох відношень $R_1 \hat{+} R_2$ визначається з виразу:

$$\mu_{R_1 \hat{+} R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) + \mu_{R_2}(x, y) - \mu_{R_1}(x, y) \cdot \mu_{R_2}(x, y).$$

Для введених операцій справедливі такі *властивості дистрибутивності*:

$$R_1 \cap (R_2 \cup R_3) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_3) ,$$

$$R_1 \cup (R_2 \cap R_3) = (R_1 \cup R_2) \cap (R_1 \cup R_3) ,$$

$$R_1 \cdot (R_2 \cup R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cup (R_1 \cdot R_3) ,$$

$$R_1 \cdot (R_2 \cap R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cap (R_1 \cdot R_3) ,$$

$$R_1 \hat{+} (R_2 \cup R_3) = (R_1 \hat{+} R_2) \cup (R_1 \hat{+} R_3) ,$$

$$R_1 \hat{+} (R_2 \cap R_3) = (R_1 \hat{+} R_2) \cap (R_1 \hat{+} R_3) .$$

Доповнення відношення R позначається $\overline{R}$ та визначається функцією приналежності: $\mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$.

Диз'юнктивна сума двох відношень $R_1 \oplus R_2$ визначається з виразу:

$$R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cap \overline{R_2}) \cup (\overline{R_1} \cap R_2).$$

Звичайне відношення, найближче до нечіткого відношення R з функцією приналежності $_R(x, y)$, позначається $\underline{R}$ та визначається з виразу:

$$\mu_{\underline{R}}(x, y) = \begin{cases} 0, \mu_R(x, y) < 0{,}5, \\ 1, \mu_R(x, y) > 0{,}5, \\ 0 \text{ або } 1, \mu_R(x, y) = 0{,}5. \end{cases}$$

За домовленістю приймають: $_R(x, y) = 0$ при $_R(x, y) = 0{,}5$.

Для нечітких відношень подібно до нечітких множин можуть бути визначені й інші операції: включення, рівність, різниця, симетрична різниця, обмежена сума, обмежена різниця, обмежений добуток, драстичне перетинання, драстичне об'єднання, λ-сума, зведення в ступінь, CON, DIL, множення на число, опукла комбінація, нормалізація, нечітке включення. При цьому замість x використовують кортеж $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$, замість A використовують відношення R, а замість E – декартовий добуток $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$.

Програмування на FuzzyCLIPS

FuzzyCLIPS (від англ. «Нечіткий» CLIPS) - це розширення CLIPS, оболонки експертної системи від NASA. Було розроблено Групою інтегрованого виведення (*Integrated Reasoning Group*) Інституту інформаційних технологій, що входить до Національного Дослідницький Рада Канади. Широко поширювалося з 2000 року.

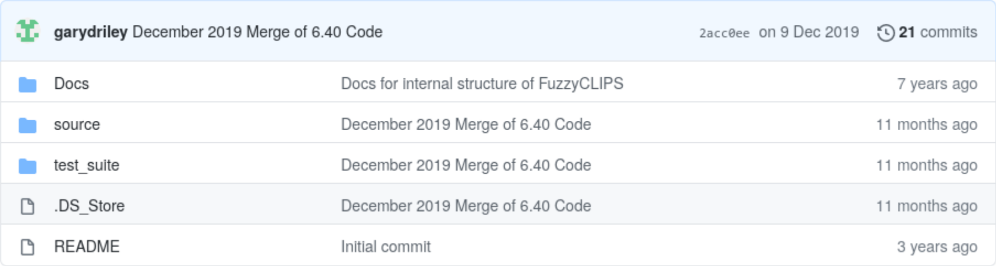
Розширення покращує можливості CLIPS, надаючи можливості нечіткої аргументації, яка повністю інтегрована з фактами і припущеннями ядра CLIPS, що дозволяє представляти і маніпулювати нечіткими фактами і правилами (складовими нечіткої логіки).

FuzzyCLIPS може мати справу з чіткими, нечіткими (або неточними), і комбінованими аргументації. Це дозволяє вільно змішувати нечіткі і нормальні умови, в правилах і фактах експертної системи. Система використовує два поняття м'яких обчислень: нечіткість і невизначеність. FuzzyCLIPS надає корисну середу для розробки додатків використовують нечітку логіку в системах прийняття рішень.

Значні зусилля потрібні для підтримки та оновлення цієї надбудови в зв'язку з виходом нових версій CLIPS.

Розширення було доступно безкоштовно тільки для некомерційного використання.

https://github.com/garydriley/FuzzyCLIPS64



garydriley December 2019 Merge of 6.40 Code		2acc0ee on 9 Dec 2019 · 21 commits
Docs	Docs for internal structure of FuzzyCLIPS	7 years ago
source	December 2019 Merge of 6.40 Code	11 months ago
test_suite	December 2019 Merge of 6.40 Code	11 months ago
.DS_Store	December 2019 Merge of 6.40 Code	11 months ago
README	Initial commit	3 years ago

Остання версія FuzzyCLIPS 6.4 датована груднем 2019 року.

Нечітка підмножина A універсальної множини U задається своєю функцією приналежності $\mu_A: U \rightarrow [0, 1]$, яка ставить у відповідність кожному елементу $u \in U$ число $\mu_A (u)$ з інтервалу $[0, 1]$, що характеризує ступінь приналежності елемента u множини A.

Нечітка змінна характеризується трійкою $<X, U, R (X; u)>$, де X - назва змінної, U - універсальна множина (кінцеве або нескінченне), u - загальна назва елементів множини U, $R (X, u)$ - нечітка підмножина множини U, що представляє собою нечітке обмеження на значення змінної u, обумовлене X.

Необмежена звичайна (НЕ нечітка) змінна u є для X базової змінної.

Лінгвістична змінна характеризується набором <X, T (X), U, G, M>, в якому X - назва змінної; T (X) (або просто T) позначає терм-множину змінної X, тобто множина назв лінгвістичних значень змінної X, причому кожне з таких значень є нечіткою змінною X зі значеннями з універсальної множини U з базовою змінною u; G - синтаксичне правило (що має зазвичай форму граматики), що породжує назви X значень змінної X, а M - семантичне правило, яке ставить у відповідність кожній нечіткій змінній X вона має сенс M (X), тобто нечітке підмножина M (X) універсальної множини U .

Конкретна назва X, породжена синтаксичним правилом G називається термом. Терм, що складається з одного слова або кількох слів, завжди фігурують разом один з одним, називається атомарним термом.

Нечіткість

Для визначення лінгвістичних змінних (дів.слайд вищє), нечітких змінних і нечітких множин в FuzzyCLIPS використовується наступна конструкція:

```
(Deftemplate лінгвістична-змінна
```

```
    кордони-універсальної-множини
    (
    (Нечітка-змінна-1 (нечітка-множина-1))
    ...
    (Нечітка-змінна-n (нечітка-множина-n))
    )
)
```

Приклад.

```
(Deftemplate height
    ; зростання - лінгвістична змінна
    0 300
    ; (Теоретично) можливе зростання (в см.)
    ((Low (150 1) (170 0))
    ; низький - нечітка змінна
    (High (170 0) (185 1))
```

```
      ; високий
      (Middle [not (low or high)])
      ; середній зріст - не низький і не високий
       )
)
```

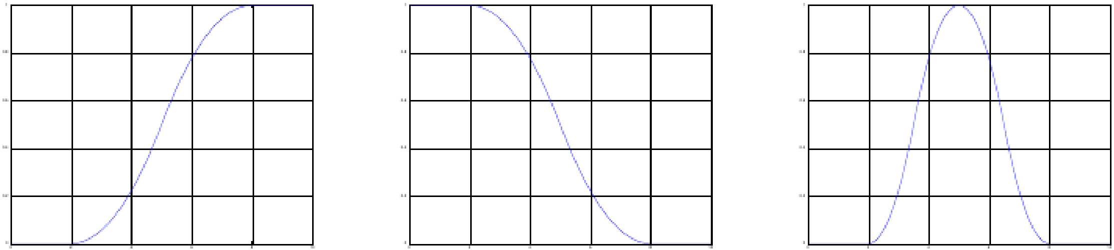
Для завдання нечітких множин в FuzzyCLIPS можуть використовуватися функції S, Z і П:

$$S(u,a,c) = \begin{cases} 0, & u \leqslant a, \\ 2\left(\frac{u-a}{c-a}\right)^2, & a < u \leqslant (a+c)/2, \\ 1 - 2\left(\frac{c-u}{c-a}\right)^2, & (a+c)/2 < u \leqslant c, \\ 1, & c < u. \end{cases}$$

$$Z(u,a,c) = 1 - S(u,a,c).$$

$$\Pi(u,h,c) = \begin{cases} S(u,c-h,c), & u \leqslant c, \\ Z(u,c,c+h), & c < u. \end{cases}$$

Графіки функцій S (u, 3, 8), Z (u, 3, 8) і П (u, 5, 3):



Приклад.

```
( deftemplate height                          ; зріст
    0 300
    (( low ( Z 150 170))                      ; низький
         ( high ( S 170 185))                 ; високий
         ( middle ( PI 20 165))               ; середній
    )
)
```

Для більш точного визначення виду нечіткої множини можна використовувати модифікатори:

not	$1 - y$
very	y^2
extremely	y^3
somewhat	$y^{1/3}$
more-or-less	$y^{1/2}$

intensify	y^2, якщо $y \in [0, 0.5]$ або $1 - 2(1 - y)^2$, якщо $y \in [0.5, 1]$
plus	$y^{1.25}$
norm	нормалізація нечіткої множини, щоб максимальне значення функції приналежності стало дорівнювати одиниці
slightly	`intensify(norm(plus A and not very A))`

Невизначеність

Для зазначення ступеня невизначеності факту або правила використовується коефіцієнт визначеності:

```
(Факт) CF коефіцієнт-визначеності

(Defrule правило

(Declare (CF коефіцієнт-визначеності))

...

=>

… )
```

Приклад.

```
( assert ( animal-kind penguin bird ) CF 0.75)
( declare flight
    ( declare ( CF 0.95))
        ; впевненість у виконанні правила - 95%
    ( animal-kind ? name bird )
        ; якщо тварина - птиця
   =>
    ( assert ( animal - can ? name fly ))
```

; то вона може літати

)

Правила висновку

Прості правила

Якщо A, то C	CF_r
$A^{/}$	CF_f
$C^{/}$	Cf_c

де A і C - передумова (антецедент) і наслідок (консеквент), A'- спостережуваний факт і C' - наслідок, який випливає з цього факту. CF_r, CF_f і CF_c - наша впевненість в правилі, факті і наслідку відповідно.

Чітке правило: A' та C' — чіткі факти:

$$CF_c = CF_r \times CF_f \qquad (*)$$

Приклад.

```
( deffacts CONDITIONS
( weather rain ) CF 0.8          ; погода дощова
( speed high ) CF 0.7            ; швидкість висока
)
( defrule ACCIDENT
( declare ( CF 0.9))             ; якщо
( weather rain )                 ; погода дощова
( speed high )              ; й швидкість висока
=>                      ; то
( assert(accident probability high))
; висока ймовірність аварії
)
```

```
( reset )
( run )
( facts )
f-1  (weather rain) CF 0.80
f-2  (speed high) CF 0.70
f-3  (accident probability high) CF 0.63
```

Нечітко-чітке правило: A' — нечіткий факт (описуваний нечіткою множиною $F_{\alpha'}$), що відповідає нечіткой передумові A (нечітка множина F_{α}); C' — чіткий факт:

$CF_c = CF_r \times CF_f \times S$

Маємо S — міру подібності між множинами F_α та $F_{\alpha'}$:

$$S = \begin{cases} P(F_\alpha \mid P_{\alpha'}), & N(F_\alpha \mid F_{\alpha'}) > 0.5, \\ \big(N(F_\alpha \mid F_{\alpha'}) + 0.5\big) \times P(F_\alpha \mid P_{\alpha'}), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

де

$$P(F_\alpha \mid P_{\alpha'}) = \max_{u \in U}\Big(\min\big(\mu_{F_\alpha}(u), \mu_{F_{\alpha'}}(u)\big)\Big)$$

та

$$N(F_\alpha \mid F_{\alpha'}) = 1 - P(\bar{F}_\alpha \mid \bar{P}_{\alpha'}),$$

$\bar{F}_\alpha$ — дополнение F_α, описываемое функцией принадлежности:

$$\mu_{\bar{F}_\alpha}(u) = 1 - \mu_{F_\alpha}(u), \quad u \in U.$$

```
( deftempla t e TEMPERATU R E
5 35
(( cold ( Z 10 20))
( hot ( S 20 30))
( comfort ( PI 5 22))
)
)
( deftempla t e ROOM
( slot id )
( slot temperatur e ( type)
FUZZY - VALUE TEMPERATU R E ))
( deffacts CONDITIONS
( ROOM ( id 1)
```

```
( temperatu re (22 0) (22 1) (22 0)) ; 22 градуса
)
)
( defrule FAN -1
( ROOM ( id ? id ) ( temperatu re hot )) ; если жарко
=>
( assert ( fan on ))                    ; включить
вентилятор
)
f-1  (ROOM (id 1) (temperature ???)) CF 1.00
( (22.0 0.0) (22.0 1.0) (22.0 0.0) )
f-2  (fan on) CF 0.05
```

Нечітко-нечітке правило: передумова і наслідок - нечіткі факти, пов'язані нечітким співвідношенням

$$R = F_\alpha \times F_c, \quad \mu_R(u,v) = \min_{(u,v)\in U\times V}\big(\mu_{F_\alpha}(u), \mu_{F_c}(v)\big).$$

Обчислення висновку засноване на композиційному правилі виведення:

$$F_{c'} = F_{\alpha'} \circ R, \quad \mu_{F_{c'}}(v) = \max_{u\in U}\Big(\min\big(\mu_{F_{\alpha'}}(u), \mu_R(u,v)\big)\Big).$$

Фактор визначеності висновку обчислюється за формулою (*).

```
; Лінгвістична змінна правдивості
( deftemplate LOGIC
0 1
(
( true ( S 0.5 0.95))
( false ( Z 0.05 0.5))
)
)
; Лінгвістична змінна «Розмір»
( deftemplate SIZE
0 10
```

```
(
( small (3 1) (5 0));маленький
( medium (3 0) (4 1) (6 1) (7 0));снредній
( large (5 0) (7 1)); великий
)
)
( deftemplate O1
( slot name )
( slot value ( type FUZZY - VALUE SIZE ))
)
( deftemplate O2
```

```
( slot name )
( slot result )
( slot value ( type)
FUZZY - VALUE LOGIC ))
```

```
; якщо розмір великийй, то результат
«великий» є правдивим
( defrule R1
( O1 ( name ? n ) ( value large ))
=>
( assert ( O2 ( name ? n ) ( result " large "
) ( value true )))
)
```

```
; якщо розмір середній, то результат
«великий» не є правдивим
( defrule R2
( O1 ( name ? n ) ( value medium ))
=>
( assert ( O2 ( name ? n ) ( result " large "
) ( value not true )))
)
```

```
; якщо розмір маленький, то результат
«великий» є брехливим
( defrule R3
( O1 ( name ? n ) ( value small ))
=>
( assert ( O2 ( name ? n ) ( result " large "
) ( value false )))
)
```

```
; факт - нечітке значення разміру
( deffacts F
( O1 ( name id1 ) ( value (4 0) (7 0.8) (9
0))) CF 0.75
)

; друк до файлу результатов обчислень
( defrule PRT
( declare ( salience -20)); низький пріоритет
- буде выконаний в кінці
( O1 ( name ? n ) ( value ? v1 ))
```

```
? res <- ( O2 ( name ? n ) ( value ? v2 ))
=>
( open " result . txt " result " w " ); файл
для записи результата


( printout result ? n " ␣ - ␣ anteceden t : "
crlf ); передумова
( plot - fuzzy - value result * nil nil ?
v1 )
```

```
( printout result ? n " ␣ - ␣ consequen t : "
crlf ); наслідок
( plot - fuzzy - value result * nil nil ?
v2 )
( printout result " Crisp ␣ value : ␣ "
( moment — defuzzify(? v2 ) crlf );
дефаззифікація
 printout result " CF ␣ is ␣ ␣ " ( get - cf ?
res ) crlf ); значення визначеності
( close result ); закрыть файл
)
```

```
; об'єднання висновків окремих правил
( defrule M
( declare ( salience -10))
? a1 <- ( O2 ( name ? n ) ( result ? r )
( value ? v1 ))
? a2 <- ( O2 ( name ? n ) ( result ? r )
( value ? v2 ))
( test ( not ( eq ? a1 ? a2 )))
=>
( bind ? v ( fuzzy - union ? v1 ? v2 ))
```

```
( assert ( O2 ( name ? n ) ( result ? r )
( value ? v )))
( retract ? a1 ? a2 )
)
```

Використання об’єднання за правилом max-man:

```
( reset )
( set -fuzzy -inference –type max-min )
( run )
```

```
id1 - antecedent:

Fuzzy Value: SIZE
Linguistic Value: ??? (*)

 1.00
 0.95
 0.90
 0.85
 0.80                                   *
 0.75                                  *
 0.70                                 *  *
 0.65                                *    *
 0.60                               *
 0.55                              *       *
 0.50                             *         *
 0.45                            *
 0.40                                        *
 0.30                          *              *
 0.25                         *                *
 0.20                        *
 0.15                       *                   *
 0.10                      *                     *
 0.05                     *
 0.00*********************                        ******
     |----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
    0.00      2.00      4.00      6.00      8.00     10.00
```

```
id1 - consequent:

Fuzzy Value: LOGIC
Linguistic Value: ??? (*)

 1.00
 0.95
 0.90
 0.85
 0.80                                         *********
 0.75                                        *
 0.70                                       *
 0.65***********************************   *
 0.60                                   *
 0.55                                     *
 0.50                                    *
 0.45
 0.40
 0.35
 0.30
 0.25
 0.20
 0.15
 0.10
 0.05
 0.00
     |----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
    0.00      0.20      0.40      0.60      0.80      1.00

Universe of Discourse:  From    0.00  to    1.00

Crisp value: 0.5200546837918593
CF is  0.75
```

Використання об’єднання за правилом max-prod:

```
( reset )
( set -fuzzy -inference –type max-prod )
( run )
```

```
id1 - antecedent:

Fuzzy Value: SIZE
Linguistic Value: ??? (*)

1.00
0.95
0.90
0.85
0.80                             *
0.75                            *
0.70                           *  *
0.65                          *    *
0.60                         *
0.55                        *       *
0.50                       *         *
0.45                      *
0.40                                  *
0.35                     *
0.30                    *              *
0.25                   *                *
0.20
0.15
0.10                  *                     *
0.05                 *
0.00*********************                    ******
    |----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
   0.00      2.00      4.00      6.00      8.00      10.00

Universe of Discourse:  From    0.00   to    10.00
```

```
id1 - consequent:

Fuzzy Value: LOGIC
Linguistic Value: ??? (*)

 1.00
 0.95
 0.90
 0.85
 0.80                                             *****
 0.75                                           **
 0.70                                          *
 0.65**************************               *
 0.60                          ****          *
 0.55                              **       *
 0.50                                *     *
 0.45                                 **  *
 0.40                                   **
 0.35                                   *
 0.30
 0.25
 0.20
 0.15
 0.10
 0.05
 0.00
     |----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
    0.00      0.20      0.40      0.60      0.80      1.00

Universe of Discourse:  From   0.00  to    1.00

Crisp value: 0.5065723346399507
CF is  0.75
```

Складні правила

Множинні висновки. Якщо з передумови A слід кілька висновків $C_1, C_2, \ldots, C_n$, то в FuzzyCLIPS вони розглядаються як n правил, кожне з яких має один висновок.

Множинні передумови. Якщо передумови $A_1, A_2, \ldots, A_n$ пов'язані союзом АБО, то правило $A_1 \lor A_2 \lor \cdots \lor A_n \rightarrow C$ представляється у вигляді об'єднання правил $A_1 \rightarrow C$, $A_2 \rightarrow C, \ldots A_n \rightarrow C$.

Якщо передумови пов'язані союзом І, то

Если A_1 и A_2, то C	CF_{r}
A'_1	$\mathrm{CF}_{\mathrm{f}_1}$
A'_2	$\mathrm{CF}_{\mathrm{f}_2}$
C'	CF_{c}

Якщо висновок є нечітким значенням, то

$$F_{c'} = F_{c'\,1} \cap F_{c'\,2}\ ,$$

(**)

де $F_{c'\,i}$ — результат нечіткого виведення з факту $A'_{\,i}$ за допомогою простого правила $A_i \rightarrow C$.

Фактор визначеності висновку для правила $A_1 \wedge A_2 \rightarrow C$ обчислюється за формулою

$CF_c = \min(CF_{f1\,'}\,,\ CF_{f2\,'}) \times CF_{\,r}$.

Функції для роботи з нечіткими множинами

(Get-u? Нечітка-множина) - межі універсальної множини.
(Get-u-from? Нечітка-множина) - нижня межа універсальної множини.
(Get-u-to? Нечітка-множина) - верхня межа універсальної множини.
(Get-u-units? Нечітка-множина) - назва базової змінної універсальної множини.
(Get-fs? Нечітка-множина) - нечітка множина.

(Get-fs-length? Нечітка-множина) - кількість вузлів, які використовуються для визначення нечіткого безлічі.

(Get-fs-x? Нечітка-множина? I) - і-я х-координата нечіткої множини.

(Get-fs-y? Нечітка-множина? I) - і-я у-координата нечіткої множини.

(Get-fs-lv? Нечітка-множина) - лінгвістична змінна, асоційована з нечіткою множиною.

(Get-fs-value? Нечітка-множина? X) - значення функції приналежності в точці х.

(Get-cf? Факт) - значення фактора визначеності для факту.

(Set-threshold? Число) - встановлення порогового значення фактора визначеності, при якому будуть виконуватися правила.

(Get-threshold) - граничне значення фактора визначеності.

(Set-fuzzy-display-precision? Ціле-число) - кількість відображуваних значущих цифр при виведенні нечіткої множини на екран.

(Set-fuzzy-inference-type? Тип) - завдання типу логічного висновку (max-min або max-prod).

(get-fuzzy-inference-type) - тип логічного висновку.
(Set-alpha-value? Значення) - правила будуть активуватися, тільки коли висота перетину шаблону і факту менше значення альфа.
(Get-alpha-value) - значення альфа.
(Create-fuzzy-value? Лінгвістична-змінна? Нечітка-множина) - створити нечітку множину.
(Fuzzy-union? Значення1? Значення2) - об’єднання нечітких множин.
(Fuzzy-intersection? Значення1? Значення2) - перетин нечітких множин.

(Fuzzy-modify? Значення? Модіфіктор) - модифікація нечіткої множини.
(Get-fuzzy-slot? Факт [? Слот]) - отримати нечітке значення, що зберігається в зазначеному слоті факту.
(Plot-fuzzy-value? Пристрій? Символ? Від? До? Нечітка-множина) - графік нечіткої множини на заданому пристрої (t) з використанням зазначеного символу в заданих межах (nil).

В наступній лекції ми розглянемо парадигму ймовірнісного програмування.