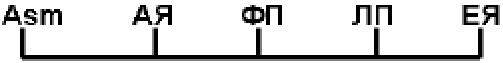
Лекція 7. ЛОГІЧНІ МОДЕЛІ НА PROLOG

Концепция логического программирования.

Логическое программирование – один из подходов к информатике, при котором в качестве языка высокого уровня используется логика предикатов первого порядка в форме фраз Хорна. Языки логического программирования (рис. 1) являются языками более высокого уровня, чем алгоритмические (Паскаль, Си) и функциональные (Лисп, CLOS).



Asm – ассемблер
АЯ – алгоритмические (процедурные) языки
ФП – языки функционального программирования
ЕЯ – Естественные Языки (русский, английский и др.)

Рис.1. Близость к естественному языку.

Терминология логического программирования заимствована из логики. Логика познает принципы человеческого мышления.

Создание языка Пролог.

1879 – Ферже публикует работу “Концептуальный язык”, излагает основы общей теории отношений.

1965 – Дж. Э. Робинсон “Машинно-ориентированная логика, основанная на принципе резолюции”.

1968 – Лавленд “Автоматическое доказательство теорем путем устранения моделей”.

1971 – Ковальски и Куэнер “Линейный отбор при помощи функции резолюции” – принципы логики предикатов.

1973 – Кольмерор в Марселе создал первый Пролог-интерпретатор на Фортране.

1974 – Ковальски, “Логика предикатов как язык программирования”.

1977 – Уоррен и Перейра, Эдинбург, интерпрететор/компилятор Пролога для ЭВМ DEC-10, первая реализация “машины Уоррена” как прототипа последующих Пролог – реализаций.

1981 – институт ICOT, Япония, проект ЭВМ пятого поколения.

1982 – Том Остерби (Отдел Информатики Датского Технического Университета) разработал Пролог-интерпретатор для компьютера VAX.

1983 – каф. МО ЭВМ ЛЭТИ, лаборатория программных систем Искусственного Интеллекта (*ProgSystems AILab*) – под рук. В.Б. Вальковского разрабатывается первый в СССР Пролог-интерпретатор для СМ ЭВМ.

1984 – Джон Гофман, Лео Йенсен и Финн Гронсков (Отдел Инф-ки Дат.Тех.Ун-т) разработали Пролог-компилятор для IBM PC.

1993 – под рук. Лео Йенсена разрабатывается Visual Prolog.

Теоретические исследования в области формализации мышления.

- Традиционная логика.
- Формальная логика.
- Логика высказываний.
- Логика предикатов.

Традиционная логика и ее законы.

Создателем традиционной логики был Аристотель. Перед Аристотелем как философом стояла задача выявить критерий истинности суждений в полемике. Аристотель ввел понятие суждения.

<u>Определение.</u> Под суждением понимается законченная мысль, выраженная в форме простого предложения естественного языка.

Аристотелем выведены три закона традиционной логики.

<u>*1. Тождественность*</u> : А является А. Суть : некоторая вещь всегда равна самой себе. Суждение означает только самого себя.

<u>*2. Противоречивость*</u> : А не является не А. Суть : вещь не может одновременно обладать и не обладать некоторым свойством; никакое суждение не является одновременно истинным и ложным.

<u>*3. Исключение среднего*</u> : А не является одновременно и А, и не А. Суть : вещь либо обладает, либо не обладает некоторым свойством. Суждение может быть либо истинным, либо ложным.

Формы суждений в традиционной логике.

Каждое суждение по Аристотелю должно иметь 4 элемента :

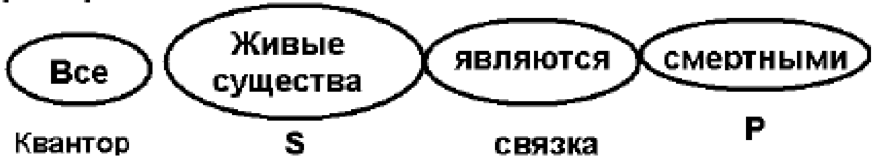
Квантор Субъект Связка Предикат.

В традиционной логике Аристотеля допускаются четыре формы суждений, каждая из которых характеризует возможное отношение между классом субъектов S и классом предикатов P :

1) Все S являются P.
2) Никакой S не является P.
3) Некоторые из S являются P.
4) Некоторые из S не являются P.

Здесь : “Все”, “Никакой” – кванторы общности (универсальные кванторы); “ Некоторые из” – квантор существования (экзистенциональный квантор); “являются” и “не являются” - связки.

Пример :



Все — Квантор

Живые существа — S

являются — связка

смертными — P

Силлогизм как система логической дедукции.

Аристотелем была создана система логической дедукции – силлогизм.

Определение. Силлогизм – множество правил построения умозаключений из имеющегося множества суждений, каждое из которых записано в одной из четырех допустимых форм.

Силлогизм содержит две предпосылки и одно заключение.

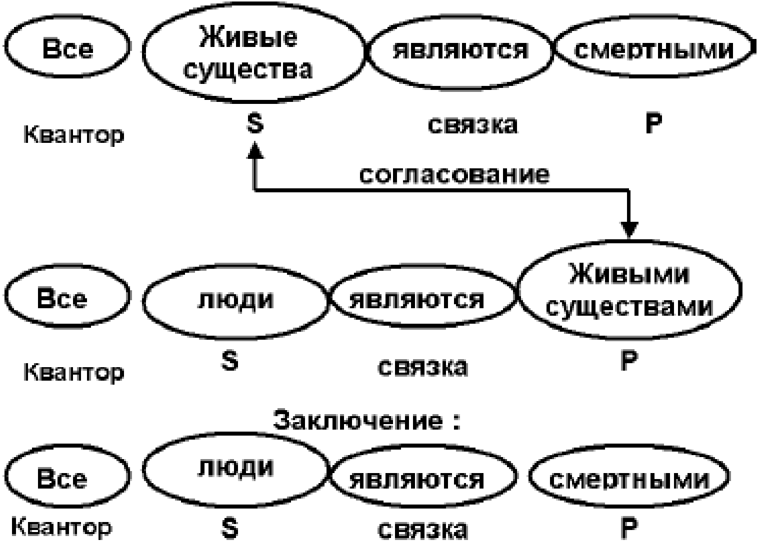
Определение. Под предпосылкой понимается суждение, признанное верным.

Определение. Заключение есть вывод, сделанный на основе предпосылок.

Выполнение вывода в дедуктивной системе Аристотеля производится путем согласования класса предикатов одного суждения с классом субъектов другого суждения.

Пример вывода в дедуктивной системе Аристотеля.

Предпосылки :



Все | Живые существа | являются | смертными

Квантор S связка P

согласование

Все | люди | являются | Живыми существами

Квантор S связка P

Заключение :

Все | люди | являются | смертными

Квантор S связка P

Процесс такого умозаключения называется процессом вывода – новых знаний на основе имеющихся (на основе предпосылок). Большой недостаток – логика справедлива только для суждений, любую проблему необходимо представлять в виде совокупности суждений одной из четырех допустимых форм.

Дедуктивный вывод для высказываний.

Учениками Аристотеля было введено понятие высказывания.

Определение. Под высказыванием понимается любое повествовательное предложение, которое утверждает о чем-либо, и мы можем судить о его истинности, либо ложности относительно некоторой ситуации.

Понятие высказывания является более общим, чем суждение в силлогизме, поскольку опускается требование соответствия одной из четырех форм суждений.

Учениками Аристотеля получены четыре логических закона для высказываний.

1) Modus Ponendo Ponens : Если из P следует Q и P истинно, то и Q – истинно, где P и Q - высказывания.
2) Modus Tollendo Tollens : Если из P следует Q и Q ложно, то и P ложно.
3) Modus Ponendo Tollens : Если и P, и Q не могут быть одновременно истинными и P истинно, то Q – ложно (исключающее “или”).
4) Modus Tollendo Ponens : Если либо P, либо Q истинно и P не истинно, то истинно Q (включающее “или” или дизъюнктивный силлогизм).

Указанные правила дедуктивного вывода явились первым шагом к созданию логики высказываний.

Возникновение и развитие формальной логики.

- Де Морган;
- Буль;
- Ферже и Пеано;

Де Морган.

В середине XIX века английский математик Де Морган сделал предположение, что формальный смысл силлогистических суждений у Аристотеля искажается семантикой естественного языка.

Де Морган взял за основу алгебраическую форму записи и предложил записывать суждения в виде символов. В силлогизме слова “есть, является”, входящие в суждение, всегда интерпретировались как отношение включения в класс. Де Морган хотел освободить слова “есть, являются” от этого смысла и распространить их на все отношения, обладающие свойством транзитивности (по аналогии с символами алгебраических операций : “+” может интерпретироваться в одной ситуации как сложение, в другой – как логическое “или”). Де Морган ввел общее понятие отношения как абстрактного качества, связанного с обладанием такими свойствами как транзитивность, симметрия и рефлексивность.

Пример : в силлогизме слова “есть” и “является” интерпретируются как отношения включения в класс. Де Морган хотел распространить слова “есть”, “является” на все отношения, обладающие свойством транзитивности.

Буль.

Английский математик Буль, современник Де Моргана, ввел логику высказываний. После Буля логика стала математической дисциплиной. Путем использования известных алгебраических символов Буль предложил единую запись для чисел, множеств и высказываний.

Так, если x и y – некоторые абстракции, то

для случая множеств имеем : x * y – пересечение, x + y – объединение;

для случая высказываний имеем : x * y – логическое “и”, x + y – логическое “или”.

Булем был предложен внутренне непротиворечивый формальный язык для высказываний, получивший название булевой алгебры.

Правила булевой алгебры.

1). Правило коммутативности.

x+y=y+x   и   x*y=y*x

2). Правило ассоциативности

x+(y+z)=(x+y)+z   и   x*(y*z)=(x*y)*z

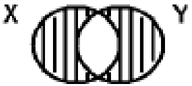
3). Правило дистрибутивности.

x*(y+z)=x*y+x*z

Эта алгебра дополняется операцией ~

При интерпретации для множеств символ ~ означает “дополнение для”.

(X*Y)



~(X*Y)

В интерпретации для высказываний символ ~ означает “не”, ~(X*Y) означает обратное истинностное значение для X*Y (исключающее или для X и Y)

Импликация (т.е. следование) вида *Если X то Y* где X и Y – истинностные значения, может быть записана как ~X+Y

Де Морган ввел в свой формальный язык два правила, которые применимы при интерпретациях для множеств и высказываний. Они известны как правила двойственности Де Моргана :

~(X+Y)=~X*~Y

~(X*Y)=~X+~Y

Таблицы истинности.

Интерпретация любого выражения языка булевой алгебры может быть представлена таблицей истинности.

X	Y	~X	~Y	X*Y	X+Y	~(X*Y)	~X+Y
T	T	F	F	T	T	F	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F	T	T

Смысл импликации **: из истины следует только истина, из лжи может следовать истина или ложь.**

Ферже.

Ферже и Пеано при разработке формального логического языка столкнулись с проблемой выработки логических средств для представления понятия последовательности, что позволило бы формально оперировать с множествами чисел. Принятая в булевой алгебре одинаковая система обозначений и для арифметики, и для логики вносят, по Ферже, некоторую путаницу. Ферже разработал “концептуальный язык” для представления действий над чисто логическими формами, которые не зависят от числовых аналогий.

В предложенной Ферже версии логики высказываний из двух исходных соединителей – “импликация” и “отрицание” – можно вывести все остальные соединители (“и”, “или” и т.д.). Ферже применил для высказываний, обладающих истинностным значением, условные обозначения, сходные с обозначениями математических функций : *предикат(список аргументов)*. *Пример :* читает(Анна, книгу).

При этом под аргументами понимаются те слова, которые могут изменяться в некоторых пределах, не изменяя смысла высказывания в целом, а под предикатом – та часть высказывания, изменение которой приводит к изменению смысла высказывания.

Пример :

Целью Ферже было создание общей теории отношений. После Ферже общая теория отношений получила название логики предикатов.

Логика высказываний.

Логика высказываний в литературе рассматривается как аксиоматическая логическая система, адекватная алгебре высказываний. В логике высказываний из атомарных высказываний с помощью логических соединителей могут быть построены логические формулы.

<u>Определение.</u> Атомарным называется высказывание, которое может иметь истинностное значение и не может быть разделено на компоненты. Атомарные высказывания обозначаются пропозициональными переменными, принимающими значения ИСТИНА (T) и ЛОЖЬ (F).

Логические соединители (связки) : примитивные (~,∨,&) и непримитивные (импликация →, эквивалентность ↔).

Смысл непримитивных соединителей выводится через смысл примитивных : p → q = ~ p ∨ q; p ↔ q = (p & q) ∨ (~p & ~q).

Здесь эквивалентность p ↔ q (эквиваленция) – новое высказывание, которое считается истинным тогда и только тогда, когда p и q либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Логические соединители и формулы.

Логические соединители задаются таблицами истинности.

p	q	$\sim p$	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p*q)$
F	F	T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
T	T	F	T	T	T	T	F

Логические формулы строятся путем комбинирования атомарных высказываний с логическими соединителями. Принято следующее старшинство логических связок : $(\neg, \&, \vee, \rightarrow)$.

В соответствии с указанным приоритетом в логике высказываний и логике предикатов формулы имеют следующий синтаксис :

<формула>::=T|F|<пропозициональная переменная>|
(¬<формула>)|
(<формула>&<формула>)
(<формула>∨<формула>)
(<формула>→<формула>)

Правильно построенные формулы.

<u>Определение.</u> Сложная логическая формула называется в логике высказываний Правильно Построенной Формулой (ППФ).

В построении ППФ принимают участие :

- атомарные высказывания;
- логические соединители.

Сложные или составные высказывания получаются из атомарных высказываний с помощью логических соединителей.

ППФ :

1) Может быть символом, представляющим атомарное высказывание.
2) Если p и q обозначают ППФ, то ППФ будут следующие логические формулы : $\sim p$, $p \& q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$.
3) Никакая другая строчка символов ППФ не является.

Предложные формы.

Определение. Предложная форма рассматривается как абстрактная спецификация синтаксиса бесконечного числа ППФ.

Определение. ППФ, синтаксически согласующаяся с предложной формой, называется конкретной подстановкой для предложной формы. К примеру, если A, B, C – символы, обозначающие атомарные высказывания, то ППФ A&(B∨C) будет конкретной подстановкой для следующих предложных форм :

1) p (напрямую сопоставляется с A&(B∨C));

2) p&q (p обозначает A, q обозначает B∨C);

3) p&(q∨r) (p обозначает A, q обозначает B, r обозначает C).

Значение некоторой ППФ устанавливается путем конкретной интерпретации.

Интерпретация ППФ.

Пусть *q* – ППФ, причем $q(x_1, \ldots ,x_n)$: x_1 , x_2, … ,x_n – пропозициональные переменные, обозначающие атомарные высказывания, входящие в *q*.

Определение. Набор приписанных переменным x_1 , x_2, … ,x_n истинностных значений называется интерпретацией формулы *q*. Значение формулы *q* в интерпретации *I* обозначается *I(q)*.

ППФ *q* сопоставляется истинностное значение *I* – оно называется смыслом или семантикой ППФ.

Формула *q* может быть истинной при интерпретации I_1 и ложной при I_2 : $I_1(q)$=*True*, $I_2(q)$=*False*.

Определение. Формула *q* называется выполнимой, если $\exists$ *I(q)* : *I(q)*=*True*.

Определение. Формула *q* называется тавтологией, если для $\forall I$ *I(q)*=*True*.

Определение. Формула *q* называется невыполнимой (или противоречием), если для $\forall I$ *I(q)*=*False*.

Пример. $A \vee \sim A$ – тавтология, $A \mathbin{\&} \sim A$ – противоречие, $A \rightarrow \sim A$ – выполнимая формула, она истинна при A=False.

Если мы установили, что ППФ *q* истинна при некоторой конкретной интерпретации *I(q)*, то в этом случае говорят, что *I* удовлетворяет *q*, *I* есть модель *q*, *q* истинна для *I*, *I* подтверждает *q*.

Логическое следствие и эквивалентность.

Определение. Формула *p* логически следует из формулы *q* (обозначается $q \Rightarrow p$), если формула *p* имеет значение *True* при всех интерпретациях, при которых *q* имеет значение *True*.

Определение. Формулы *p* и *q* логически эквивалентны (обозначается $p \Leftrightarrow q$ или просто $p=q$), если они являются логическим следствием друг друга : $q \Rightarrow p$ и $p \Rightarrow q$. Логически эквивалентные формулы имеют одинаковые значения при любой интерпретации.

Теорема. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$.

Доказательство – сравнением таблиц истинности.

Определение. Пусть p – некоторая формула, в которую входит некоторая пропозициональная переменная A (обозначается p(… A …)) или некоторая подформула q (обозначается p(… q …)). Формула, получаемая из формулы p подстановкой формулы q вместо всех вхождений переменной A, обозначается как p(… A …){q//A}. Формула, получаемая из формулы p подстановкой формулы q вместо некоторых (в частности, вместо одного) вхождений подформулы r, обозначается как p(… r …){q/r}.

Использование логики для работы с конкретной областью знаний.

Определение. Модель предметной области рассматривается как совокупность аксиом в виде теории, каждая аксиома есть ППФ,

Последовательность действий по построению теории Предметной Области :

Отыскать атомарные высказывания;

Выяснить взаимосвязи между атомарными высказываниями;

Подобрать обозначения атомарным высказываниям;

Используя ППФ, описать логические связи между отдельными атомарными высказываниями.

Определение. Если теория адекватно описывает конкретную область знаний, то *все факты этой области знаний, имеющие истинное значение, будут следствием аксиом этой теории* и ни один факт, имеющий ложное значение, не будет следствием этих аксиом.

Пример построения теории в логике высказываний.

Опишем отношение Петра к английскому языку.

Сначала построим ЕЯ-орисание данной области знаний.

(1) Если Петр интересуется английским языком, то либо он запишется на факультатив, либо он ленив.

(2) Если Петр самостоятельно изучает английский язык, то он интересуется английским языком.

(3) Петр самостоятельно изучает английский язык.

(4) Петр не ленив.

Выделяем атомарные высказывания :	Обозначения :	Лог. Связи :
Петр запишется на факультатив.	A	$D \to A \vee B$
Петр ленив.	B	$C \to D$
Петр самостоятельно изучает язык.	C	C
Петр интересуется английским языком.	D	$\sim B$

Доказательство ППФ. Семантический метод.

Существует два метода доказательства ППФ : семантический и синтаксический.

При семантическом методе доказательства ППФ проверяются все модели множества аксиом.

Определение. Под моделью аксиомы понимается такая ее интерпретация, при которой аксиома истинна. Для построения модели аксиомы нужно рассмотреть все возможные значения атомарных высказываний, входящих в аксиому, и выделить такие значения атомарных высказываний, при которых аксиома будет истинна.

Если аксиома А будет истинна во всех интерпретациях, то истинность А будет доказана. Тогда говорят, что А является следствием аксиом теории.

Синтаксический метод доказательства ППФ.

Существует две разновидности синтаксического метода доказательства ППФ : естественный и аксиоматический.

Определение. **Пусть имеются три формулы : A, A→B, B. Про формулу B говорят, что она получается по правилу вывода modus ponens из формул A и A→B** *(Если из A следует B и A – истинна, то и B будет истинна).*

Суть естественного метода : берем все правила, которые нам интуитивно кажутся верными : коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, двойного отрицания (де Моргана) и modus ponens. Получив все эти правила и используя теорию, мы должны вывести ППФ. Вывод выполняется шагами. На каждом шаге :

- **Есть предпосылки : $F_1, \ldots, F_n$;**
- **Есть правило вывода R.**

modus ponens – это правило заключения :

$$\frac{F_1, \ldots, F_n}{G} R$$

Заключение есть результат употребления правил вывода. Доказательство состоит из последовательности шагов. На каждом шаге правило вывода применяется по отношению к предпосылкам или предшествующим заключениям :

предпосылки → правило вывода → заключение

заключение+ предпосылки → правило вывода → заключение1

Аксиоматический метод доказательства ППФ.

Аксиоматический метод заключается в получении доказуемых ППФ на основе минимального количества аксиоматических схем, которые являются логически тождественно истинными ***предложными формами***. Пример аксиоматической схемы :

$((\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p))$.

Здесь p и q – пропозициональные переменные. Поскольку p и q **обозначают ППФ, то аксиоматическая схема служит обозначением** ***бесконечного числа аксиом***, **имеющих такую же синтаксическую форму.**

Помимо аксиоматических схем, в системе используется одно и только одно правило вывода. Чаще всего это modus ponens.

Если ППФ является логическим следствием аксиом теории, то квалифицированный специалист-логик сможет доказать это путем искусного применения аксиоматических схем по отношению к аксиомам данной теории.

Логика предикатов.

В логике предикатов мы имеем дело с атомарными формулами, логическими соединителями, ППФ. Атомарная формула в логике предикатов является элементарным объектом, обладающим истинностным значением. Основной отличительной особенностью логики предикатов является представление атомарных формул

В логике предикатов атомарная формула состоит из символического обозначения предиката и термов, выступающих в роли аргументов этого предиката :

предикат(список термов).

В общем случае обозначение предиката – это имя отношения, существующего между аргументами : $p(t_1, t_2, \dots ,t_n)$.

Определение. Под термом понимают либо константу, либо переменную, либо вызов (употребление) функций. В логике предикатов приняты следующие обозначения : a, b, c – константы, f, g, h – функции, x, y, z – переменные, P, Q, R – предикаты.

Употребление функции записывается как символическое обозначение функции (f, g, h), за которым в скобках располагается список аргументов : $f(t_1, t_2, \dots ,t_n)$.

ППФ в логике предикатов.

<u>Определение.</u> Под ППФ в логике предикатов понимается либо атомарная формула, либо атомарная формула в комбинации с логическими соединителями. ППФ в логике предикатов определяется следующим образом :

1)Атомарная формула есть ППФ.

2)Если A и B суть ППФ, то ППФ будут и формулы : ~A, A∨B, A&B, A→B, A↔B.

Смысл логических соединителей ~,∨,&,→ и ↔точно такой же, как и в логике высказываний. Использование переменных в Логике Предикатов имеет смысл лишь в случае, когда они вводятся с помощью кванторов. Кванторы позволяют делать высказывания о множествах объектов и формулировать утверждения, истинные для этих множеств. В исчислении предикатов имеется два квантора : существования (∃) и всеобщности (∀). Если x – переменная, A – произвольное высказывание, то значение кванторов выражается следующим образом : ∃ x A (существует x такой, что A истинно) и ∀ x A (A истинно для всех значений переменной x).

Значение ППФ в Логике Предикатов.

Как и в логике высказываний, в логике предикатов существует два метода доказательства ППФ : синтаксический и семантический. При использовании семантического метода истинностное значение зависит от интерпретации, поскольку в атомарных формулах содержатся термы. Вначале показывается, как интерпретация придает смысл ППФ, а затем рассматриваются ППФ, выражающие этот смысл.

Построение теории в логике предикатов включает следующие этапы :

1)Анализ конкретной области знаний;

2)Выбор обозначений, представляющих особенности данной области знаний;

3)Строительство ППФ с использованием обозначений.

Множество ППФ в Логике Предикатов – это теория, отдельные ППФ – аксиомы этой теории.

Анализ структуры области знаний.

Здесь вначале выделяется множество значимых сущностей. Это множество называется областью интерпретации.

Пример – для целочисленной интерпретации областью интерпретации будут целые числа.

На следующем этапе определяется, какие функции в этой области знаний являются наиболее важными (если они есть). Для целочисленной арифметики это сложение, вычитание, умножение, целочисленное деление, остаток от деления.

Затем идентифицируются наиболее значимые отношения между сущностями рассматриваемой области знаний (между элементами области интерпретации).

В заключении выявленные ППФ оформляются синтаксически, то есть при помощи аксиом.

Функции и отношения в Логике Предикатов.

Определение. Функция – это отображение n элементов из области интерпретации на один элемент этой же области (n – количество аргументов функции). Причем в логике предикатов функция сама по себе не может иметь значения, значение может иметь только употребление функции.

Определение. Употребление функции есть указание конкретного случая отображения *n* элементов из области интерпретации (*n* – количество аргументов функции) на один элемент этой области.

Пример 1. Область знаний – арифметика, область интерпретации – множество натуральных чисел. Функция “умножение” : умн(3,2)→6. Число 6 называется значением данного употребления функции “умножить”.

Пример 2. Область знаний – родственные отношения между некоторым лицом по имени Иван и некоторыми другими людьми, с которыми он общался на семейном сборе. Область интерпретации – множество людей : Иван, Петр – двоюродный брат Ивана, Михаил - двоюродный брат Ивана, Мария – подруга Михаила : {Иван, Петр, Михаил, Мария}. Поскольку нас интересуют только родственные связи, то тот факт, что некто есть подруга человека из заданной области интерпретации должно быть описан с помощью функции : подружка(”Михаил”)→“Мария”.

Определение. Под отношением в логике предикатов понимается отображение n элементов из области интерпретации на истинностное (булевское) значение.

Построение теории предметной области в логике предикатов.

Использование Логики Предикатов применительно к конкретной области знаний сходно с использованием логики высказываний.

1). Анализируется структура предметной области. Здесь выделяется область интерпретации, над которой задаются множество значимых функций и вводится множество отношений.

2). Вводятся обозначения для всех выделенных элементов. Вначале – для констант. Значениями констант (a, b, c) будут элементы области интерпретации. На следующем этапе подбираются обозначения для функций (f, g, h). Функция, представленная некоторым обозначением, определяется указанием значений различных ее употреблений. В заключении для каждого отношения подбирается обозначение предикатов (P, R, Q).

3). Записываются ППФ для предметной области. Множество ППФ рассматривается как теория предметной области, отдельная ППФ – как аксиома.

Интерпретация ППФ в Логике Предикатов есть установление истинности ППФ с точки зрения теории предметной области.

Пример построения теории для предметной области “Семейный сбор”.

Область знаний – родственные отношения Ивана с людьми, с которыми он общался на семейном сборе. Область интерпретации : {Иван, Петр, Михаил, Мария}.

Следующим шагом после установления области интерпретации будет выбор обозначений для представления элементов области интерпретации. Вначале – обозначения для констант : a – Петр, b – Иван, c - Михаил. Затем подбираем обозначения для функций. Здесь множество значимых функций состоит из одной функции : f(”Михаил”)=“Мария”. В заключении для отношения “двоюродный брат” вводим предикат P : P(X,Y) – X является двоюродным братом Y.

P(a,b) является истинным
P(a,c) является ложным
P(b,a) является истинным
P(b,c) является истинным
P(c,a) является ложным
P(c,b) является истинным

P(a,f(c)) является ложным
P(f(c),a) является ложным
P(b,f(c)) является ложным
P(f(c),b) является ложным
P(c,f(c)) является ложным
P(f(c),c) является ложным

Из приведенных атомарных формул можно строить ППФ. Функция, представленная некоторым обозначением, определяется указанием различных ее употреблений (семантическим путем). Отношение, представленное обозначением предиката, определяется путем указания булевских значений различных конкретных случаев этого отношения.

Интерпретация ППФ в логике предикатов.

1) Каждой константе, входящей в ППФ, приписывается элемент из области интерпретации.
2) Каждой переменной приписывается элемент из области интерпретации.
3) Каждой функции приписывается ее значение.
4) Каждой атомарной формуле приписывается ее значение.
5) Вычисляются истинностные значения ППФ.

Переменные в Логике Предикатов.

Если в атомарной формуле в качестве терма выступает переменная, то это означает, что на данном месте может присутствовать более чем один элемент из области интерпретации. Пример : P(x, b).

Интерпретировать ППФ, содержащие переменные, можно только после того, как переменной приписано какое-либо конкретное значение. Это приписывание называется в Логике Предикатов квантификацией, а в логическом программировании – конкретизацией.

В логике предикатов оперируют двумя видами квантификации.

Квантификация	Смысл	Квантор переменной
Экзистенциональная квантификация (∃ x)	В области интерпретации существует хотя бы один x, который сделает рассматриваемую ППФ истинной.	Квантор существования.
Универсальная квантификация (∀ x)	Для всех x из области интерпретации ППФ	Квантор общности.

Свойства ППФ в Логике Предикатов.

Определение. Интерпретация, делающая ППФ истинной, называется моделью этой ППФ.

Определение. ППФ называется удовлетворительной, если она принимает истинное значение хотя бы при одной интерпретации.

Определение. Неудовлетворительная ППФ есть ППФ, которая ложна при всех интерпретациях. Пример неудовлетворительной ППФ для Предметной Области “Семейный сбор” : $\exists$ x P(x, b)&~P(x,b).

Определение. Тождественно истинной ППФ называется ППФ, которая истинна при всех интерпретациях. Пример тождественно истинной ППФ для “Семейного сбора” : $\exists$ x P(x, b)v~P(x,b).

Определение. ППФ называется следствием теории, если она истинна на всех моделях теории.

Определение. Моделью теории называется ее интерпретация, при которой истинны все ее аксиомы.

Пусть у нас есть теория как результат работы. Необходимо доказать, что ППФ является следствием теории.

Методы доказательств утверждения “ППФ является следствием теории”.

Как и в логике высказываний, существует два метода доказательства : семантический и синтаксический.

Различают простой и альтернативный семантические методы.

Для доказательства простым семантическим методом необходимо исследовать значения аксиом для всех возможных областей интерпретации, а так как областей интерпретации бесконечное множество, то он на практике не используется.

При использовании альтернативного семантического метода производится поиск модели множества аксиом для такой интерпретации, в которой ППФ будет ложной. Если такая интерпретация существует, то ППФ не будет следствием теории. Однако отсутствие такой интерпретации не означает, что данная ППФ является следствием теории.

Оба семантических метода доказательства не используются в Логике Предикатов. Большее распространение получил синтаксический метод доказательства.

Синтаксический метод доказательства “ППФ является следствием теории”.

При использовании синтаксического метода доказательства ищется полное множество правил вывода.

Определение. Под полным понимается такое множество правил, при котором все аксиомы будут следствием множества правил.

Здесь используются законы Аристотеля, Де Моргана, дистрибутивность. Существует два подхода к построению полного множества правил : метод естественных рассуждений и метод аксиоматических схем.

Метод естественных рассуждений будет пригодным и для логики предикатов, если дополнить его правилами вывода, касающимися ППФ, в состав которых входят кванторы переменных.

Определение. Определение предиката с помощью аксиом называется аксиоматизацией или аксиоматическим определением.

Метод аксиоматических схем можно адаптировать для логики предикатов, если дополнить его аксиомами, касающимися кванторов переменных.

Определение. Полное множество правил вывода для логики предикатов называется исчислением предикатов.

Аксиоматическое определение отношений.

При возможности аксиоматического определения каждый конкретный случай отношения, который считается истинным в заданной интерпретации, можно вывести как следствие из аксиом, воспользовавшись синтаксическим методом доказательства. При использовании правил вывода семантическое определение отношения выводится из его аксиоматического определения.

Пример. Пусть областью знаний является арифметика, а областью интерпретации – натуральные числа. Требуется : разработать представление любого натурального числа в виде терма для построения теории этой области. Для этой цели введем константу a, которой приписывается значение из области интерпретации :

Значением a является 1.

Введем функцию “следующий за” :

Значением s(a) является 2.

Значением s(s(a)) является 2 и т.д.

Введением константы a натуральное число определено в виде терма.

Рекурсивное определение отношения.

Теперь рассмотрим отношение “является натуральным числом” и определим это отношение с помощью системы двух аксиом :

Аксиома 1 : N(a)

Аксиома 2 : $N(x)\rightarrow N(s(x))$

Эти две аксиомы позволяют рекурсивно определить любое натуральное число, поскольку в Аксиоме 2 соблюдение отношения в одном конкретном случае (N(S(x))) зависит от соблюдения этого отношения в другом конкретном случае, то есть N(x).

Если использовать данные аксиомы и полное множество правил вывода логики предикатов, то окажется возможным доказать синтаксически, что отношение N соблюдается для любого терма, который может быть построен при помощи символа a, обозначающего константу и символа s, обозначающего функцию.

Исчисление предикатов 1-го порядка как основа Логического Программирования.

Основная проблема реализации на ЭВМ разработанных для исчисления предикатов процедур доказательств ППФ заключается в комбинаторном росте числа вариантов.

Автоматизированный метод доказательства через опровержение разрабатывался в конце 1950-х годов Гилмором, Дэвисом, Патнэмом и Правицем и основан на разработанный Хербрандом в 1930-е годы метод.

Основываясь на работе Правица, Робинсон создал правило вывода, названное им резолюцией.

Метод доказательств через опровержение.

В основе метода доказательств через опровержение лежит отношение между тождественностью и непоследовательностью.

Определение. С позиций семантики теория будет непоследовательной, если не существует интерпретации, удовлетворяющей всем аксиомам этой теории. С позиций синтаксиса теория будет непоследовательной, если окажется возможным вывести из нее противоречие вида $A\&{\sim}A$.

Для доказательства того, что ППФ является следствием теории, используется следующий прием : к теории добавляется отрицание исследуемой ППФ.

Если после этого удается доказать противоречивость теории, то это означает, что ППФ имеет значение “истина” и соответствует имеющейся теории. Для реализации подобного механизма доказательства используется специальная область интерпретации – “мир Хербранда”.

Мир Хербранда.

Мир Хербранда есть особая область интерпретации, которая обладает следующим свойством : ППФ будет следствием аксиом теории, если отсутствует интерпретация мира Хербранда, при которой одновременно и отрицание этой ППФ, и все аксиомы этой теории были бы истинными.

Мир Хербранда для некоторой теории определяется через обозначения, используемые в этой теории.

Определение. **Основной терм (ground term) – это либо обозначение константы, либо употребление функции, все аргументы которой являются *основными термами*. Мир Хербранда для некоторой теории состоит из всех основных термов, которые могут быть построены на основе обозначений, используемых в этой теории.**

Определение. **Основная атомарная формула (ground atomic formula) – это атомарная формула, не содержащая переменных в качестве аргументов, то есть все аргументы являются основными термами.**

Определение. **Основание Хербранда для теории – это множество всех основных атомарных формул, которые можно построить из обозначений, используемых в теории.**

Определение. **Мир Хербранда – область интерпретации для херbrandовской интерпретации. В херbrandовской интерпретации теории значением каждого основного терма является он сам. В любой конкретной херbrandовской интерпретации каждая основная атомарная формула в основании Хербранда означает либо истину, либо ложь.**

Хербрандовская модель теории.

<u>Определение.</u> Хербрандовская модель теории – такая хербрандовская интерпретация, при которой каждая аксиома теории истинна.

Рассмотрим в качестве примера теорию первого порядка.

Символические обозначения в теории :

- Символы, обозначающие константы : a, b, c;
- Символы, обозначающие переменные : x, y, z;
- Символы, обозначающие предикаты :
    - P – с одним аргументом,
    - Q – с двумя аргументами.
- Символы, обозначающие функции : отсутствуют.

Основание Хербранда для рассматриваемой теории :

P(a) P(b) P(c)
Q(a,a) Q(a,b) Q(a,c)
Q(b,a) Q(b,b) Q(b,c)
Q(c,a) Q(c,b) Q(c,c)

Одна из хербрандовских интерпретаций приведенного здесь основания Хербранда : P(a), P(b), P(c), Q(a,b), Q(b,c) означают истину, остальные атомарные формулы – ложь.

Всего в рассматриваемом примере существует 2^{12}=4096 возможных хербрандовских интерпретаций, поскольку в рассматриваемое основание Хербранда входят 12 формул.

Полезные свойства хербрандовских интерпретаций.

В нехербрандовской интерпретации значением константы будет некоторый элемент области интерпретации, например, b⇔”Иван”.

В хербрандовской интерпретации значением константы всегда будет она сама. Данное свойство хербрандовских интерпретаций позволяет сделать следующее заключение : если ППФ будет истинной во всех хербрандовских моделях теории, то она будет истинной и во всех моделях этой теории для всех возможных областей интерпретации и, следовательно, будет следствием данной теории.

Т.о., последовательность действий процедуры опровержения :

1) Взять отрицание доказуемой ППФ;
2) Найти хербрандовскую модель теории, при которой отрицание ППФ будет истинным;
3) Если такая модель существует, то ППФ не может быть следствием теории;
4) Если такой модели не существует, то ППФ является следствием теории.

Фразовая форма записи.

Определение. Фразовая форма логики предикатов – это способ записи формул, при котором употребляются только соединители &, v и ~.

Определение. Литерал – это позитивная или негативная атомарная формула.

Определение. Фраза есть множество литералов, соединенных символом v. Негативные литералы размещаются в конце каждой фразы, а позитивные – в начале. Схематический вид фразы :

P1 v P2 v … v Pn vN1 vN2 v… vNn

Здесь P1 … Pn – позитивные литералы, а N1 … Nn – негативные литералы.

Фразу можно рассматривать как обобщение понятия импликации. Действительно, если A и B – атомарные формулы, то A – →B может быть записана как ~AvB. Поскольку ~A – негативно, а B – позитивно, то фразовая форма будет иметь вид : Bv~A.

Альтернативные заключения и необходимые условия.

Определение. Все позитивные атомарные формулы, входящие во фразу, являются альтернативными заключениями, а все негативные атомарные формулы – необходимыми условиями.

Пример.

Если C, D, E и F – атомарные формулы, то фраза $C \vee D \vee \sim E \vee \sim F$ гласит, что C или D будут истинными, если одновременно и F, и E истинны.

Доказательство. Согласно правилу Де Моргана $(\sim E \vee \sim F) \Leftrightarrow \sim(E \& F)$. Отсюда $(C \vee D \vee \sim E \vee \sim F) \Leftrightarrow (C \vee D \vee \sim(E \& F))$. Поскольку $(C \vee D)$ – позитивно, а $\sim(E \& F)$ – негативно, то рассматриваемую фразу можно записать с помощью импликации : $(E \& F) - \rightarrow (C \vee D)$, что доказывает наше утверждение.

Простейшая фраза содержит только один литерал, позитивный или негативный. Если a,b,c – константы, Q- предикат с двумя аргументами, то Q(a,b) – это фраза, в которой утверждается, что Q(a,b) безусловно истинно, фраза ~Q(b,c) означает, что ~Q(b,c) безусловно ложно.

Фразы можно записывать с помощью обратной стрелки импликации (стрелки Пирса) между позитивными и негативными литералами : $C,D \leftarrow E,F$.

Фразы Хорна.

Определение. Фраза Хорна (хорновский дизъюнкт) – это фраза, содержащая только один позитивный литерал.

Фраза $C \vee D \vee \sim(E \& F)$ из рассмотренного примера фразой Хорна не является, так как в ней имеются два позитивных литерала. Для представления ее в виде фразы Хорна воспользуемся двойным отрицанием : $D \Leftrightarrow \sim(\sim D)$.

Теперь получаем : $(C \vee D \vee \sim(E \& F)) \Leftrightarrow (C \vee \sim(\sim D) \vee \sim(E \& F))$.

Применив правило Де Моргана : $(C \vee \sim(\sim D) \vee \sim(E \& F)) \Leftrightarrow (C \vee \sim((\sim D) \& (E \& F)))$, получаем фразу Хорна.

Обозначив $\sim D$ как G и воспользовавшись обратной стрелкой, получаем :

$C \leftarrow G,E,F$

Резолюция.

Правило резолюции открыто Робинсоном. Данное правило сходно с дизъюнктивным силлогизмом (Modus Tollendo Ponens).

Определение. две фразы могут быть резольвированы друг с другом, если одна из них содержит позитивный литерал, а другая – соответствующий негативный литерал с одним и тем же обозначением предиката и одинаковым количеством аргументов, причем аргументы обоих литералов могут быть унифицированы (то есть согласованы) друг с другом.

Правило резолюции.

Рассмотрим теорию, состоящую из двух фраз :

$P(a) \vee \sim Q(a,b)$ (1)

$Q(x,y) \vee \sim R(x,y)$ (2)

Поскольку во фразе (1) содержится негативный литерал $\sim Q(a,b)$, а во фразе (2) – соответствующий позитивный литерал $Q(x,y)$, обозначение предиката во фразах (1) и (2) одно и то же, то есть Q, а аргументы обоих литералов могут быть унифицированы (если в качестве аргумента выступает переменная, то она унифицируема с любой константой) : переменная x унифицируется с константой a, переменная y – с константой b.

В итоге фраза (1) может быть резольвирована с фразой (2). Как результат получается фраза, называемая резольвентой : $P(a) \vee \sim R(a,b)$. Или в форме записи с обратной стрелкой :

$P(a) \leftarrow R(a,b)$ (3)

Фраза (3) становится новой фразой теории. Если в одной и той же фразе переменная встречается более одного раза и эта переменная в процессе резолюции унифицируется с константой, то резольвента будет содержать данную константу на тех местах, где рассматриваемая переменная располагалась в исходной фразе.

Пустая фраза.

Определение. Фразу вида P(a) называют заключением без условий, фразу вида ~P(a) – условием без заключения. Если заключение без условий и условие без заключения резольвируются друг с другом, то получающаяся резольвента называется пустой фразой.

Одновременное присутствие в теории заключения без условия и условия без заключения является противоречием и говорит о непоследовательности данной теории.

С позиций семантики возможность выведения пустой фразы означает невозможность построения хербрандовской модели рассматриваемой теории.

Алгоритм, основанный на резолюции.

Далее рассмотрим нисходящую (или обратную) стратегию резолюции.

Определение. При использовании нисходящей стратегии ставится целью обнаружить, является ли единственная фраза C следствием существующего множества фраз T. При этом предполагается, что множество фраз T является непротиворечивым.

Алгоритм работает следующим образом. Вначале к существующему множеству фраз добавляется отрицание проверяемой фразы. Если алгоритм позволит вывести пустую фразу из получившегося множества фраз, то проверяемая фраза следствием теории.

Действие алгоритма описывается двумя правилами.

1). В первой выполняемой резолюции следует использовать только что добавленное отрицание фразы.

2). В каждой последующей резолюции должна участвовать резольвента предыдущей резолюции (это предотвращает бесцельное “блуждание” алгоритма).

Пример резолюции нисходящим методом.

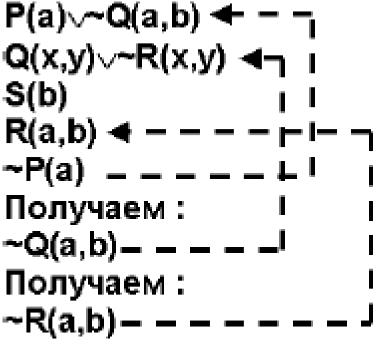
Пусть имеется множество фраз :

P(a)∨~Q(a,b)
Q(x,y)∨~R(x,y)
S(b)
R(a,b)

Необходимо выяснить, является ли фраза P(a) следствием существующего множества фраз.

Решение.

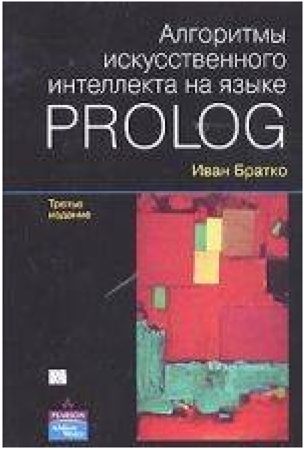
На первом шаге добавляем к остальным фразам отрицание фразы P(a) :



P(a)∨~Q(a,b)
Q(x,y)∨~R(x,y)
S(b)
R(a,b)
~P(a)
Получаем :
~Q(a,b)
Получаем :
~R(a,b)
Получаем противоречие.

Таким образом, добавление ~P(a) к существующему множеству фраз приводит к противоречию. Показанная стратегия является нисходящей, так как она начинает процесс решения с отрицания заключения – стратегия поиска “сначала вглубь”, поскольку результат последней резолюции всегда используется в следующей за ней резолюции.

ЛІТЕРАТУРА



Алгоритмы
искусственного
интеллекта на языке
PROLOG

Иван Братко

Третье
издание

И. Братко

Программирование
на языке ПРОЛОГ
для искусственного
интеллекта

Издательство „Мир"